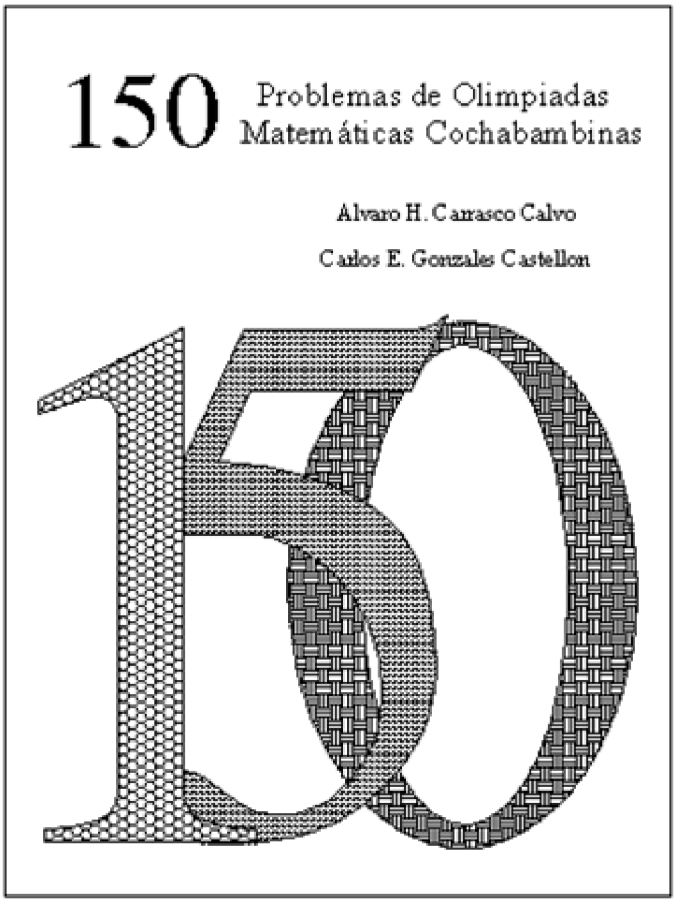
150 PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS COCHABAMBINAS

ALVARO HERNANDO CARRASCO CALVO
CARLOS ESTEBAN GONZALES CASTELLON

2010

Índice general



150 PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS COCHABAMBINAS
PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS
Segunda edición
ALVARO HERNANDO CARRASCO CALVO
Universidad Mayor de San Simón
Departamento de Matemáticas
CARLOS ESTEBAN GONZALES CASTELLON
Universidad Mayor de San Simón
Departamento de Matemáticas
2010

Impreso en Cochabamba Bolivia

Dedico esta obra a:

Andres Alvaro y Juan Pablo, mis queridos hijos

Ana Patricia, mi amada esposa

Alvaro H. Carrasco C.

Las olimpiadas matemáticas han constituido un espacio donde aparece el reto no solo de conocer más sino de resolver problemas. Resolver problemas tiene que ver con enfrentarse a una situación desconocida, aunque se conozcan los elementos involucrados, una situación donde las técnicas parecen no conducir a nada, donde el trabajo a realizar parece inalcanzable. Y, es, más bien, en este punto en el que surge la necesidad de dar solución. Surge la desesperación de intentar caminos irrisorios, opciones inicialmente inaceptales, como si la mente pudiese forzar las bases propuestas, cambiar los rigores de la realidad. Luego, tiempo y tiempo... y de repente el descubrimiento, haber encontrado, no se sabe de dónde, una manera. Después se atesora la idea encontrada, se la repiensa, se la saborea. Queda todavía el requerimiento de comunicarla, de ponerla sobre papel, queda la cuestión estética de escribirla sin ningún exceso ni ninguna falta.

Carlos E. Gonzales Castellón

Prefacio

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias en el área de la Matemática escolar y colegial, donde se busca motivar en Matemáticas a travez de la resolución de problemas de Matemáticas “especiales”. Con “especiales” se quiere caracterizar a los problemas no usuales, aunque en su solución se usen los conocimientos escolares estandar, la principal característica de este proceso de resolución es el razonamiento, imaginación, intuición geométrica,..., etc, son muchos los temas que el olimpista usa en este proceso de resolución. ¿Como se puede aprender en este proceso?, la respuesta casi todos la tenemos: “resolviendo problemas” es que se aprende a resolver problemas, en medio camino se podrá parar, para aprender Matemáticas ya que la cultura Matemática es imprescindible en este menester.

En nuestro medio tenemos mucho material sobre Olimpiadas Matemáticas (en internet muchísmo más) sin embargo el nivel de los mismos en muchos casos no corresponde al nivel de escolaridad o colegiatura del estudiante de nuestra ciudad y país, entonces una colección de problemas de Olimpiadas Matemáticas como la que presentamos esta destinada a llenar este vacio, estos han sido tomados de pruebas de las Olimpiadas Matemáticas: “Gauss”, “Euler” y “Departamental” que realizamos año a año y constituyen un referente sobre Olimpiadas Matemáticas Nacionales.

Los autores queremos brindar publicamente nuestro agradedimiento a la comunidad Olimpica por motivarnos con sus problemas, ya que los que presentamos aquí han tenido como inspiración aquellos y simplemente los hemos tomado, los hemos adecuado, haciendoles algunas ingeniosas variaciones y en algunos casos son originales, no podemos terminar estas palabras sin agradecer al colega Mgr. Amilcar Martinez M. por su excelente colaboración con algunos problemas, a todos ellos gracias por habernos ayudado en la construcción de más de 150 modelos de entrenamiento en Olimpiadas Matemáticas. Finalmente agradecemos a Mgr. Hernan Flores, Jefe del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y Tecnología en la Universidad Mayor de San Simon, por la motivación en la realización de este trabajo, tambien estamos en deuda con el Programa de Mejoramiento de la Matemática e Informática MEMI por el apoyo logistico en la impresión de este manual.

Cochabamba julio de 2010

Alvaro H.Carrasco Calvo y Carlos E. Gonzales C.

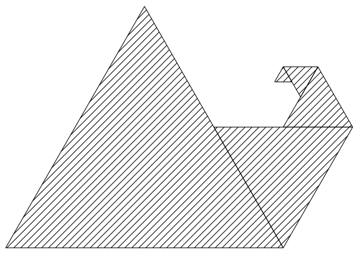
Capítulo 1

Problemas Olimpiada Matemática “Gauss”

Ejercicio 1 La distancia de Liniers a Luján es de 60 km. Juan Pablo y Andres caminan desde Liniers hasta Luján a velocidad constante de 5km/h. Cada 10 minutos sale un tren de Liniers a Luján, que viaja a velocidad constante de 80km/h. ¿Cuántos trenes que viajan de Liniers a Luján ven pasar Juan Pablo y Andres durante su caminata si salen de Liniers al mismo tiempo que sale un tren?

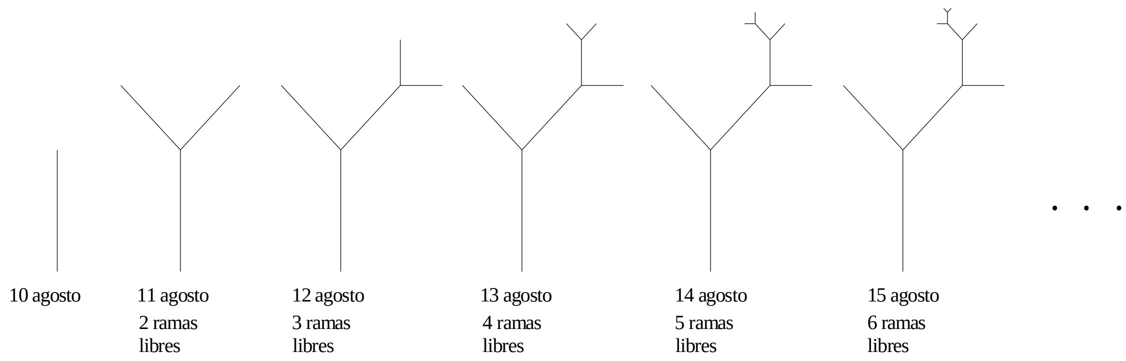
Ejercicio 2 Un edi…cio tiene sus pisos numerados del 0 al 25. El ascensor del edi…cio tiene sólo dos botones, uno amarillo y uno verde. Al apretar el botón amarillo, asciende 7 pisos, y al apretar el botón verde, desciende 9 pisos. Si se aprieta el botón amarillo cuando no hay su…cientes pisos por encima, el ascensor se rompe, y lo mismo ocurre cuando se aprieta el botón verde y no hay su…cientes pisos por debajo. Dar una secuencia de botones que le permita a una persona subir del piso 0 al 11 utilizando el ascensor.

Ejercicio 3 Con cinco triángulos equiláteros se armó esta …gura. El triángulo grande tiene 82 cm de perímetro. El lado del triángulo mediano es la mitad del lado del triángulo grande, el lado del triángulo pequeño es la mitad del lado del triángulo mediano y asi sucesivamente. ¿Cuál es el perímetro de la …gura?



Ejercicio 4 Ayer 10 de agosto plante una rama de un arbol extraterrestre llamado RAMUSTHUS". Cada dia al amanecer crecen dos ramas en alguna de las ramas de las del día anterior y solo en una de

ellas (ver …gura) :



Contando desde hoy (11 de agosto de 2009) diga que día, de que mes y año habrán en total 1006 ramitas libres (ver …gura). Nota: Considere cada año con 365 día y el mes de enero con 31 días, febrero con 28 días, marzo con 31 días, abril con 30 días, mayo con 31 días, junio con 31 días,con 30 días, julio con 31 días,agosto con 31 días, septiembre con 30 días,octubre con 31 días, noviembre con 30 días y diciembre con 31 días

Ejercicio 5 Tomás y Nico arrojan 7 veces una moneda. Si sale cara gana Tomás, si sale cruz gana Nico. Cada vez que se arroja la moneda, el perdedor le paga al ganador. La primera vez 1 centavo, la segunda dos centavos, la tercera cuatro centavos, y asi siguiendo, cada vez el perdedor paga el doble de lo que pagó el perdedor de la vez anterior. Si Nico comenzó con 187 bolivianos y …nalizó con 188 bolivianos, determinar cuántas veces ganó Nico.

Ejercicio 6 Se escriben los números enteros positivos del uno hasta el mil, uno a continuación del otro, sin espacios intermedios. Queda así una larga secuencia de dígitos (el primero es 1 y el último es 0):

$$12345678910111213\,:::::::::\,9989991000$$

Determinar cuantos dígitos se han escrito hasta que se escriben por primera vez:
(i) tres 8 seguidos;
(ii) tres 9 seguidos.

Ejercicio 7 Hallar todos los números enteros positivos de dos cifras ab tales que:

$$\frac{ab}{ba} = \frac{7}{4}$$

Ejercicio 8 Aldo tiene todas las letras del abecedario en tres tamaños: grandes, medianas y pequeñas:

A,B,C,D,E,. . . ,Z

A,B,C,D,E,. . . ,Z

A,B,C,D,E,. . . ,Z

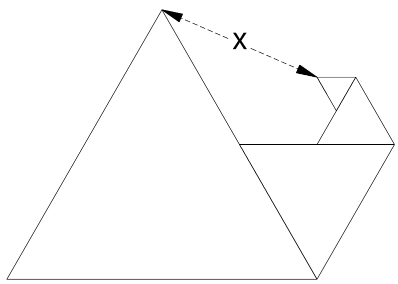
Usando letras de dos tamaños, Aldo quiere escribir el nombre de su amiga ANA. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Ejercicio 9 Sea N el resultado de la suma de 101 números que tienen el último dígito 8 y los demás dígitos 9, desde el 8, que tiene cero nueves, hasta el que tiene 100 dígitos nueve.

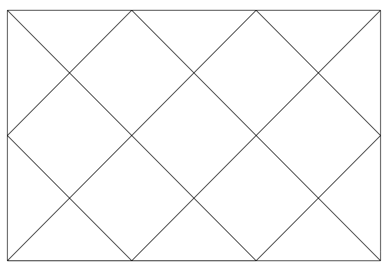
$$N = 8 + 98 + 998 + 9998 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{100 \text{ veces}}8$$

Hallar el número N.

Ejercicio 10 Con cuatro triángulos equiláteros se armó esta …gura. El triángulo grande tiene lado 40 cm de lado. El lado del triángulo mediano es la mitad del lado del triángulo grande. El lado del triángulo pequeño es la mitad del lado del triángulo mediano y asi el pequeñito tiene lado igual a la mitad del pequeño. Hallar la distancia x:



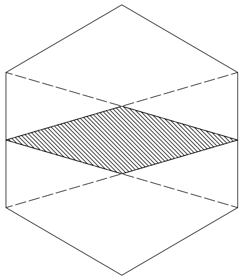
Ejercicio 11 1. Una sala rectangular de 2 metros por 3 metros esta cubierta por 7 cuadrados y 10 triángulos como lo muestra la …gura. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para cubrir una gran sala rectangular de metros por metros?



Ejercicio 12 Sobre el planeta ESTAURUS los años tienen 228 días (12 meses de 19 días). Cada semana cuenta con 8 días: Undi, dossi, tresdi, cuatrodi, cincodi, seisdi, sietedi y ochodi. Sobre el planeta

OCEANUS los años tienen 120 días (10 meses de 12 días) cada semana cuenta con 6 días: ujdi, deudi, troidi, quadi, cindi y sidi. Esmurf nació en ESTAURUS un dosdi, el primer día del cuarto mes y en OCEANUS era troidi del sexto mes. ¿Cuándo el cumpla 20 años en ESTAURUS cuantos años cumplirá en OCEANUS y que día caerá sus cumpleaños?

Ejercicio 13 ¿Qué fracción del hexágono regular representa la …gura (rombo) sombreada?



Ejercicio 14 Se construye un número como sigue:
Primer paso: se empieza con 2008
Segundo paso: se escribe 2008 entre todos los dígitos del número anterior y se tiene

220080200802008 8

Tercer paso: se inserta como antes 2008 entre todos los dígitos del número anterior y se tiene:

22008220080200802008820080200822008020080200882008020082200802008020088200882008820088

(las rayitas debajo de los 2008 solo se ponen para mostrar como se construye el número en cada paso)
Se tienen dos preguntas:
(a) En el quinto paso se tiene un número con muchos dígitos, ¿cuántas cifras tiene este número?
(b) Este número es divisible por tres, justi…que su respuesta.

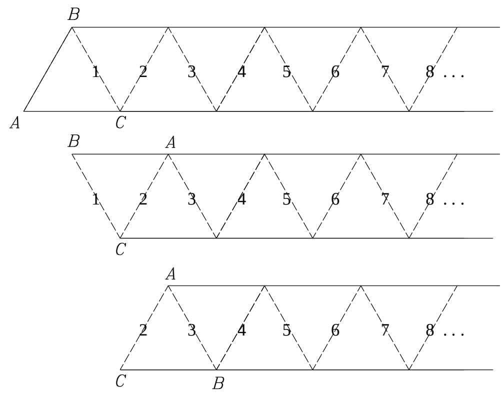
Ejercicio 15 . Se tiene la siguiente sucesión:

$$\begin{array}{lcl} 2^1 & = & 2 \\ 2^2 & = & 2 \text{ £ } 2 = 4 \\ 2^3 & = & 2 \text{ £ } 2 \text{ £ } 2 = 8 \\ 2^4 & = & 2 \text{ £ } 2 \text{ £ } 2 \text{ £ } 2 = 16 \\ & & \vdots \end{array}$$

¿Cuál es la cifra de las unidades de 2^{2008}?

Ejercicio 16 Todos los números del 1 al 1000 se escriben uno al lado del otro, de la siguiente forma 12345678910111213 14. . . .9991000
¿Cuantas veces aparece al número “123” en este orden y sin separaciones?

Ejercicio 17 La …gura representa una tira larga de papel dividida en 2010 triángulos equiláteros marcados con líneas punteadas. Supongamos que la tira será doblada siguiendo las líneas punteadas en el orden indicado por los números, de forma que la tira siempre quede en posición horizontal y la parte de la izquierda que ya ha sido doblada se dobla hacia la derecha. ¿Cuál es la posición en que terminan los vértices A,B,C después de 2008 dobleces?

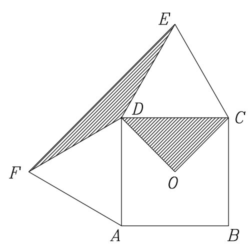


Ejercicio 18 El profesor pide al Luciano realizar la división 1 ¥ 7, la cual no es exacta pero el no le dice cuando detenerse. Entonces Luciano continuó su división todo el …n de semana. El domingo en la noche el había obtenido 2000 cifras después de la coma decimal. ¿Cuál es la última cifra que Luciano obtuvo antes de caer de cansancio?

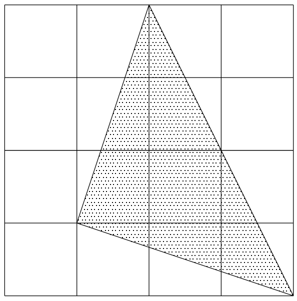
Ejercicio 19 Tome el año de nacimiento del gran Sultán Amadou Moussa. Invirtiendo las cifras de este número y restándole el año original se obtiene 1278. Procediendo de la misma forma con el año de la muerte del gran Sultán se tiene otra vez el mismo resultado 1278. ¿Cuantos años vivió el Sultán sabiendo que vivió después de Jesucristo?

Ejercicio 20 Mi bicicleta esta asegurada por una cadena con un candado de código, el número que abre el candado esta formado por tres cifras tal que su producto es impar y la suma de estos dígitos es cuadrado perfecto. ¿Cuántos códigos existen y cuales son?

Ejercicio 21 Los vértices $A; B; C$ y D forman un cuadrado, sobre los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$ se construyen triángulos equiláteros AFD y DEC respectivamente, decida si el triángulo FDE tiene mayor área, menor área o igual área que el triángulo DCO.



Ejercicio 22 Tomando como unidad de super…cie un cuadradito, calcula el área del triángulo.



Ejercicio 23 En esta suma cada letra representa una cifra. ¿Cuál es el valor del AGUA?

$$
\begin{array}{r}
\text{GOTA} \\
\text{GOTA} \\
+\ \text{GOTA} \\
\text{GOTA} \\
\text{GOTA} \\
\hline
\text{AGUA}
\end{array}
$$

Ejercicio 24 Uniendo cubos de madera, cuya arista mide 1 cm, se construye un prisma recto (un cubo alargado) cuya base es un rectángulo de dimensiones 4cm por 5■cm y cuya altura sea 3cm. A continuación se pintan sus caras de negro y una vez que la pintura está seca, se desmonta el prisma descomponiéndolo en cubos unidad de arista 1cm.

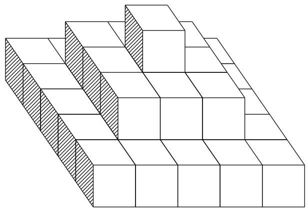
(a) Completa la siguiente tabla:

Número de cubos unidad que tienen pintada

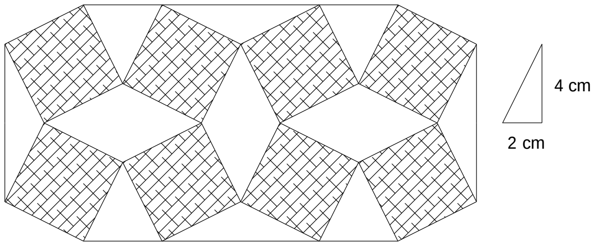
3 caras	2 caras	1 cara	0 caras

(b) Si se mantienen las dimensiones de la base y se varía la altura, ¿es posible construir un prisma recto en el que el número de cubos unidad con cero caras pintadas fuese la cuarta parte del número total de cubos unidad?

Ejercicio 25 La siguiente …gura se construye con bloques cúbicos. ¿Cuántas aristas habrían en total si continuamos poniendo cubos por abajo, hasta que en el fondo haya un cuadrado 9 x 9?. Nota en un cubo una cara es un cuadrado, cuyos lados en un cubo se llaman aristas, así en un cubo hay 12 aristas. En la …gura en los dos primeros pisos hay 56 aristas



Ejercicio 26 . Calcula el área total del siguiente mosaico, donde el mismo esta constituido por uno o mas triángulos como el dado en la …gura. Observe que debe calcular el área total y no solo la parte oscura.



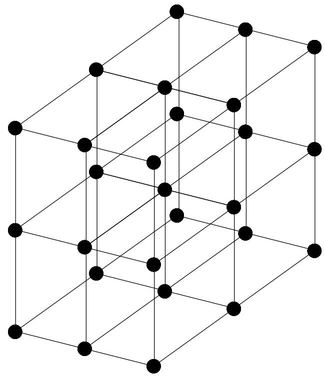
Ejercicio 27 Cada letra corresponde a un número distinto entre 0 y 9, se cumple

$$ZOO^2 = TOPAZ$$

¿Sabrías calcular el valor de cada letra?

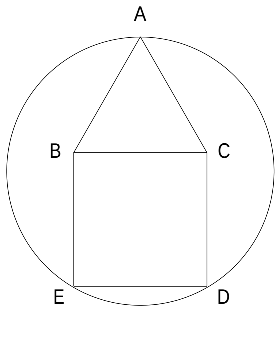
Ejercicio 28 ¿Cuánto suman los primeros 100 dígitos que aparecen después de la coma al desarrollar $\frac{1}{13}$?

Ejercicio 29 La …gura representa un modelo construido con bolas y varillas. ¿Cuántas bolas y cuántas varillas de conexión tiene? ¿Cuántas bolas y varillas de conexión tendrá una construcción de cinco pisos con la misma base? Calcula las bolas y las varillas necesarias para construir un modelo de 100 pisos.



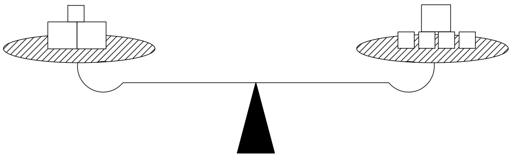
Ejercicio 30 En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible por 11 y que deja resto 3 al dividirlo por 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?

Ejercicio 31 Si ABC es un triángulo equilátero y $BCDE$ es un cuadrado cuyo lado mide 2 cm. Si la circunferencia de radio r pasa por los puntos $A; D$ y E como se muestra en la …gura, halla una expresión algebraica para calcular r.

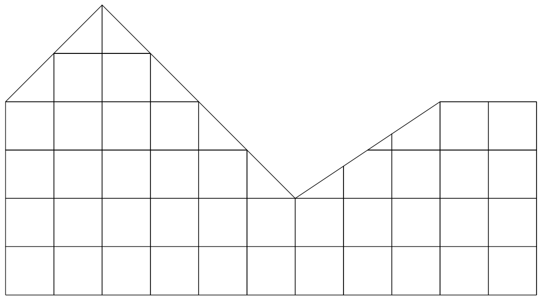


Ejercicio 32 Tres amigos sentados en …la, escuchan el número 13 y el primero le suma 1 y dice 14, el segundo suma 2 a este número y dice 16, el tercero suma a este número 3 y dice 19, como le toca el turno al primer amigo este suma 1 y dice 20 y así siguen contando. A Esteban se escucha decir 61, a Juan 40 y a Patricia el 602. ¿Cuál de los tres amigos dice 2006?

Ejercicio 33 Se tienen 6 bloques grandes y 8 bloques pequeños. Si un bloque pequeño pesa 2/3 de uno grande y cuando todos los bloques juntos pesan 34 kilos. ¿Cómo se deben disponer estos bloques en cada lado de una balanza de dos brazos para que pesen lo mismo?

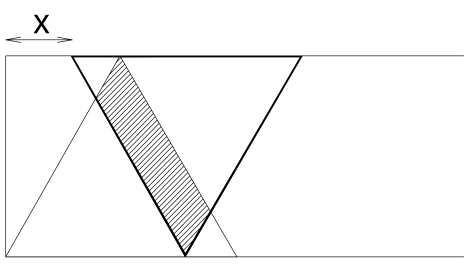


Ejercicio 34 En la ...gura adjunta, ¿cuantos cuadrados existen?



Ejercicio 35 Dos nadadores nadarán en un piscina de 100 metros, uno nada a una velocidad de 50 m/min. y el otro a 70 m/min. Ambos salen del mismo extremo de la piscina y cuando llegan al otro extremo vuelven y así sucesivamente, halle los tres primeros tiempos en los que ambos nadadores se encuentran.

Ejercicio 36 En la ...gura adjunta los dos triángulos son equiláteros y sus bases se mueven sobre las rectas dadas, estas rectas son paralelas y distan 8 metros. Halle el valor de tal que el área sombreada sea la quinta parte del área de cualquiera de los triángulos equiláteros dados.



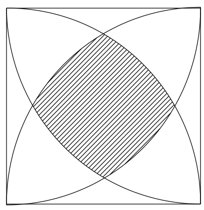
Ejercicio 37 Se disponen los números naturales como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 2 & & 3 & & & & \\ & & & 4 & & 5 & & 6 & & & \\ & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & \\ & 11 & & 12 & & 13 & & 14 & & 15 & \\ 16 & & 17 & & 18 & & 19 & & 20 & & 21 \\ & & & & & \cdots & & & & & \end{array}$$

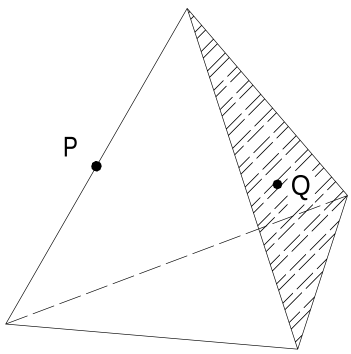
¿Cuál la suma de los números de la fila 2006?. Sugerencia: tenga presente que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ejercicio 38 Sea el número $N = 999\ldots9$ en el cual el 9 aparece 2006 veces, calcule la suma de los dígitos del número N^2.

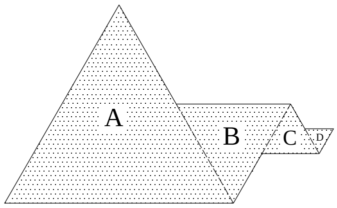
Ejercicio 39 Dado un cuadrado, con centro en cada vértice se trazan 4 circunferencias de radio igual al lado del cuadrado. Determinar el lado del cuadrado sabiendo que el área del cuadrado curvilíneo que se muestra es igual a $9 - 9\sqrt{3} + 3\pi$



Ejercicio 40 En un tetraedro de arista 4, se halla una hormiga en el punto medio P de una arista y se dirige al centro Q de una cara. ¿Cual es la mínima distancia que recorre?



Ejercicio 41 Con 4 triángulos equiláteros se contruye la siguiente …gura, cuyo perímetro es 48. El lado del triángulo B es la mitad del lado del triángulo A, el lado del triángulo C es la mitad del lado del triángulo B y el lado del triángulo D es la mitad del lado del triángulo C. Hallar el área total de la …gura.



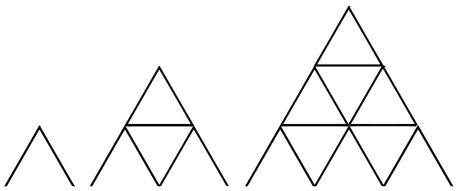
Ejercicio 42 Pedro empieza con el número 46 y forma una sucesión de dígitos añandiendo cada vez el producto de los dos últimos dígitos que se escribierón a continuación del último dígito escrito. Así, los cinco primeros dígitos son 46248... Calcular el dígito que esta en la posición 2006.

Ejercicio 43 Sea N el número que se obtiene al escribir consecutivamente los números de 1 al 98 es decir

$$N = 123456789101112{:}{:};98$$

¿Es N divisible por 18? explica porqué.

Ejercicio 44 Para hacer una torre de cartas de 1 piso se usan 2 cartas, para hacerla de 2 pisos se usan 7 cartas, para hacerla de 3 pisos se usan 15; ¿ cuántas cartas hay que usar para hacer un torre de 2006 pisos?



Ejercicio 45 Escribimos todos los números enteros consecutivos, sin ninguna separación entre ellos, a partir del 1 y hasta el 2006, obtenemos un número de muchas cifras:

$$12345678910111213141516171819202122{:}{:};20052006$$

(a) ¿Cuántas cifras tiene ese número?
(b) ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 2006?

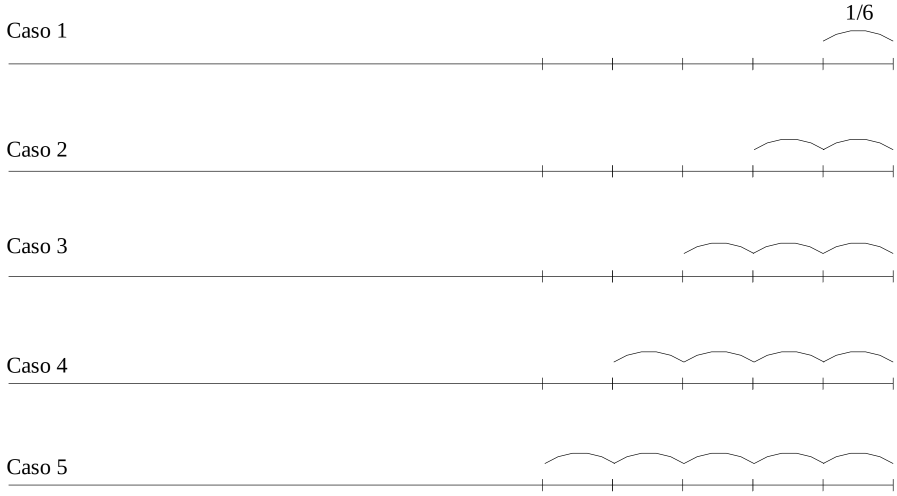
Capítulo 2

Soluciones Olimpiada Matemática "Gauss"

Solución 1:

Tenemos las siguientes observaciones: Juan Pablo y Andres tardan $\frac{60}{5}$ = 12 horas. Los trenes van saliendo en intervalos de 10 minutos = $\frac{1}{6}$ horas. Aparentemente los muchachos podrán ser vistos desde los trenes $\frac{12}{1=6}$ = 72 veces. Pero debemos considerar los siguientes casos:

Caso 1: si los muchachos se hallan a una distancia tal que necesitan $\frac{1}{6}$ horas para llegar a Lujan, entonces el tren que salga ese instante no logra encontrarlos pues el tren en ese tiempo recorre $\frac{80}{6}$ km y le falta por recorrer 60-$\frac{80}{6}$ = $46\frac{2}{3}$; mientras que los muchachos recorren $\frac{5}{6}$ km.



Caso 2: si los muchachos se hallan a una distancia tal que necesitan $2\frac{1}{6}$ horas para llegar a Lujan, entonces el tren que salga ese instante no logra encontrarlos

Caso 3: si los muchachos se hallan a una distancia tal que necesitan $3\frac{1}{6}$ horas para llegar a Lujan, entonces

el tren que salga ese instante no logra encontrarlos
Caso 4: si los muchachos se hallan a una distancia tal que necesitan $4\frac{1}{6}$ horas para llegar a Lujan, entonces el tren que salga ese instante no logra encontrarlos
Caso 5: si los muchachos se hallan a una distancia tal que necesitan $5\frac{1}{6}$ horas para llegar a Lujan, entonces el tren que salga ese instante los ve, ya que el tren recorre $80 \times \frac{5}{6} = 66\frac{2}{3}$
Entonces el número de trenes que logran alcanzar y entonces ver a los caminantes es $72 - 4 = 68$ veces.

Solución 2

Denotamos con x el boton amarillo y con y el boton verde, entonces las secuencias son:

x	x	y	x	x	y	x	x	y	x	y	x	y
x	x	y	x	x	y	x	x	y	x	y	y	x
x	x	y	x	x	y	x	x	y	y	x	x	y
x	x	y	x	x	y	x	x	y	y	x	y	x
x	x	y	x	x	y	x	y	x	x	y	x	y
x	x	y	x	x	y	x	y	x	x	y	y	x
x	x	y	x	x	y	x	y	x	y	x	x	y
x	x	y	x	x	y	x	y	x	y	x	y	x
x	x	y	x	x	y	y	x	x	x	y	x	y
x	x	y	x	x	y	y	x	x	x	y	y	x
x	x	y	x	x	y	y	x	x	y	x	x	y
x	x	y	x	x	y	y	x	x	y	x	y	x
x	x	y	x	y	x	x	x	y	x	y	x	y
x	x	y	x	y	x	x	x	y	x	y	y	x
x	x	y	x	y	x	x	x	y	y	x	x	y
x	x	y	x	y	x	x	x	y	y	x	y	x
x	x	y	x	y	x	x	y	x	x	y	x	y
x	x	y	x	y	x	x	y	x	x	y	y	x
x	x	y	x	y	x	x	y	x	y	x	x	y
x	x	y	x	y	x	x	y	x	y	x	y	x
x	x	y	x	y	x	y	x	x	x	y	x	y
x	x	y	x	y	x	y	x	x	x	y	y	x
x	x	y	x	y	x	y	x	x	y	x	x	y
x	x	y	x	y	x	y	x	x	y	x	y	x

x	x	x	y	x	y	x	x	y	x	y	x	y
x	x	x	y	x	y	x	x	y	x	y	y	x
x	x	x	y	x	y	x	x	y	y	x	x	y
x	x	x	y	x	y	x	x	y	y	x	y	x
x	x	x	y	x	y	x	y	x	x	y	x	y
x	x	x	y	x	y	x	y	x	x	y	y	x
x	x	x	y	x	y	x	y	x	y	x	x	y
x	x	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x
x	x	x	y	x	y	y	x	x	x	y	x	y
x	x	x	y	x	y	y	x	x	x	y	y	x
x	x	x	y	x	y	y	x	x	y	x	x	y
x	x	x	y	x	y	y	x	x	y	x	y	x
x	x	x	y	y	x	x	x	y	x	y	x	y
x	x	x	y	y	x	x	x	y	x	y	y	x
x	x	x	y	y	x	x	x	y	y	x	x	y
x	x	x	y	y	x	x	x	y	y	x	y	x
x	x	x	y	y	x	x	y	x	x	y	x	y
x	x	x	y	y	x	x	y	x	x	y	y	x
x	x	x	y	y	x	x	y	x	y	x	x	y
x	x	x	y	y	x	x	y	x	y	x	y	x
x	x	x	y	y	x	y	x	x	x	y	x	y
x	x	x	y	y	x	y	x	x	x	y	y	x
x	x	x	y	y	x	y	x	x	y	x	x	y
x	x	x	y	y	x	y	x	x	y	x	y	x

Solución 3

El lado del mayor triángulo es $\frac{82}{3}$; entonces el perímetro buscado es:

$$\left(\frac{82}{3} + \frac{82}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{82}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{82}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{82}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{82}{3}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{8} \times \frac{82}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{82}{3}\right) + \left(\frac{1}{16} \times \frac{82}{3} + \frac{1}{16} \times \frac{82}{3} + \frac{1}{16} \times \frac{82}{3}\right) = \frac{861}{8}$$

Solución 4

Como el primer día hay dos ramas, el segundo día hay tres ramas, el tercer día hay cuatro , es fácil ver que el día 1005 habran 1006 ramas.

del 11 de agosto de 2009 al 11 de agosto de 2010	365
del 11 de agosto de 2010 al 11 de agosto de 2011	365
del 12 de agosto de 2011 al 31 de agosto de 2011	20
septiembre, octubre, noviembre y diciembre de 2011	122
enero, febrero, marzo y abril de 2012	120
1 de mayo de 2012 a 13 de mayo de 2012	13
Total	1005

luego el día 13 de mayo de 2012 habran en total 1006 ramas.

Solución 5

La secuencia de centavos a pagar es

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64$$

Notemos que en cada jugada se gana más de lo que se podría ganar en todas las jugadas anteriores juntas. Lo máximo a ganar es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

De este modo, ya que Nico debe tener al …nal 100 centavos más de lo que tenía al inicio, está obligado a ganar el último y el penúltimo lanzamiento, con los que acumula 96 centavos. Entre las primeras 5 jugadas debe acumular 4 centavos más.
Si Tomás ganara la quinta jugada, recibiría 16 centavos, más de lo que Nico acumularía en las primeras cuatro jugadas, 15 centavos. Entonces Nico también esta obligado a ganar la quinta jugada, acumulando 112 centavos. Para perder los 12 centavos extras en las primeras cuatro jugadas, tendría que perder la cuarta jugada, de lo contrario acumularía más centavos. Entonces tendría 104 centavos, de los que debería perder 4 en las primeras tres jugadas. Si pierde la tercera jugada, tendría exactamente 100 centavos, pero todavía habría que ver que ocurre con las primeras dos jugadas. Gane o no en cualquiera de ellas siempre tendrá más de 100 o menos de 100 centavos. Así, *es imposible que* Nico se quede con 100 centavos más de los que tenía.

Solución 6

Solución (i) La primera vez que aparecen tres 8 seguidos, ocurre al escribir 88 y 89. Entonces hay que contar la cantidad total de dígitos al escribir los números del 1 al 87. Ahora bien, del 1 al 9 habrá precisamente 9 dígitos. Del 10 al 87 habrá (87 ¡ 9) £ 2 dígitos, dando un total de

$$9 + 78 \text{ £ } 2 = 165$$

Solución (ii). Aquí, la primera vez que aparecen tres 9 seguidos, ocurre al escribir 899 y 900. Del 1 al 9 hay 9 números de 1 dígito. Del 10 al 99 hay 90 números de 2 dígitos. Del 100 al 898 hay 799 números de 3 dígitos. Contando además el primer dígito del número 899, tenemos

$$9 + 90 \text{ £ } 2 + 799 \text{ £ } 3 + 1 = 2587$$

Solución 7

Como la fracción simplificada da $\frac{7}{4}$, investiguemos los múltiplos de numerador y denominador y veamos cuáles cumplen la condición:

$$\frac{7}{4};\ \frac{14}{8};\ \boxed{\frac{21}{12}};\ \frac{28}{16};\ \frac{35}{20};\ \boxed{\frac{42}{24}};\ \frac{49}{28};\ \frac{56}{32};\ \boxed{\frac{63}{36}};\ \frac{70}{40};\ \frac{77}{44};\ \boxed{\frac{84}{48}};\ \frac{91}{52};\ \frac{98}{56}$$

Como se puede apreciar, los números que cumplen son cuatro 21, 42, 63, 84.

Solución 8

Notemos para empezar que tiene *obligatoriamente* que utilizar dos tamaños de letras para las dos A del nombre. Hay tres opciones en lo referente a los tamaños de letra: grande-mediano, grande-pequeño y mediano-pequeño. Una vez que ha sido fijado los tamaños de letra a usar, hay cuatro maneras de escribir el nombre

ANA
ANA
ANA
ANA

Entonces el total de maneras es $3 \times 4 = 12$.

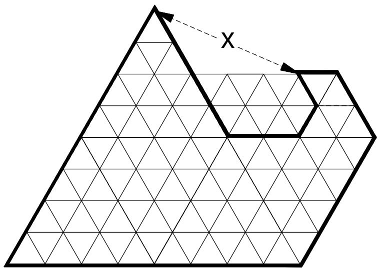
Solución 9

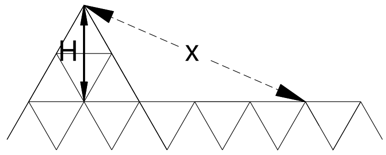
Vamos a sumar 2 a cada uno de los 101 sumandos y para que la suma no se altere restamos igual número

$$\begin{aligned} N &= (8+2)+(98+2)+(998+2)+(9998+2)+\cdots+\left(\underbrace{99\ldots9}_{100\text{ nueves}}8+2\right)-2\times 101 \\ &= 10+100+1000+10000+\cdots+1\underbrace{00\ldots0}_{101\text{ ceros}}-202 \\ &= \underbrace{111\ldots111}_{101\text{ unos}}0-202=\underbrace{111\ldots111}_{98\text{ veces}}0908 \end{aligned}$$

Solución 10

De acuerdo a la figura tenemos que el lado de cada triángulo pequeño es $\frac{40}{8}=5$ y la altura del mismo es $h=\frac{5\sqrt{3}}{2}$



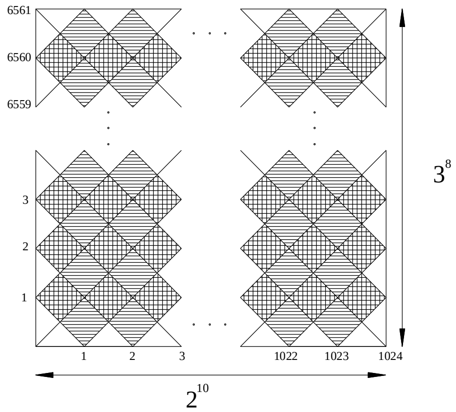


es claro de $H = 2h = 5\sqrt{3}$; luego por el teorema de pitágoras se tiene:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \left(5\sqrt{3}\right)^2 + (4 \times 5)^2 = 475 \\
x &= 5\sqrt{19}
\end{aligned}
$$

Solución 11

Consideremos la figura siguiente:



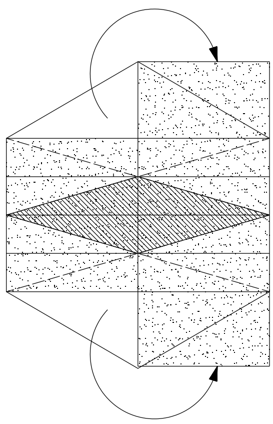
vamos a contar los cuadrados como sigue: consideremos los cuadrados cuadriculados, hay $6560 \times 1024 = 6717440$; por otro lado para los cuadrados rayados: hay $1023 \times 6561 = 6711903$ y en total 13429343:

Solución 12

Esmurf cumple 20 años, osea vivió $20 \times 228 = 4560$ dias en Estaurus, veamos ahora cuandos años representa en el planeta Oceanus $4560 \div 120 = 38$; lo cual dice que en Oceanus cumple 38 años y como la división es exacta el día es troidi.

Solución 13

Consideremos la siguiente construcción:



se puede ver el área buscada equivale a 4 triángulos de un total de 24 es decir, el área sombreada es $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ del hexágono.

Solución 14

Para el primer número se tienen 4 dígitos.

Para el segundo número se tienen 4 £ 3 + 4 = 16 dígitos, donde insertamos 2008 entre los dígitos de 2008 osea en tres lugares, sin olvidar los dígitos originales 2008.

Para el tercer número se tienen 4 £ 15 + 16 = 76 dígitos, como antes insertamos 2008 entre los dígitos del segundo número, osea en 15 lugares, sin olvidar los dígitos originales del segundo número.

Para el cuarto número se tienen 4 £ 75 + 76 = 376 dígitos.

Para el quinto número se tienen 4 £ 375 + 376 = 1876 dígitos.

La suma de los dígitos del quinto número es 4690 (veri…que esto!) el cual no es múltiplo de 3 y en consecuencia no lo es el quinto número.

Solución 15 Las potencias de 2 van dejando una secuencia cíclica de últimas cifras

$$2; 4; 8; 6; 2; 4; 8; :::$$

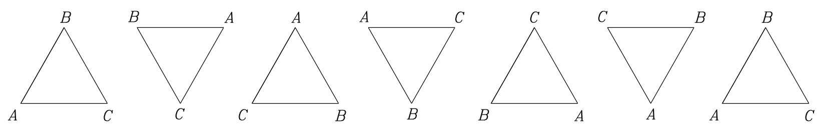
las cifras se van repitiendo cad cuatro lugares. Ya que 2008 es un múltiplo de 4, al repetir el factor 2, llegaremos a la misma primera cifra de partida, esto es, la cifra 6.

Solución 16

Tomar en cuenta que solo se usan números de hasta tres cifras. La secuencia 123 puede aparecer al juntarse tres partes 1j2j3, pero esto ocurre evidentementeen una sola oportunidad, en el inicio. La secuencia 123 tambien puede aparecer al juntarse dos partes. El caso 12j3 aparece al escribir 312 y 313. El caso 1j23 aparece cuando se juntan los números 231 y 232. Finalmente, la secuencia 123 puede aparecer como un solo bloque y se da al escribir precisamente el número 123. Entonces el número 123 aparece 4 veces.

Solución 17

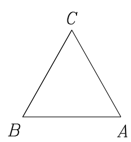
Fijándonos en el primer triángulo de la secuencia los dobleces dan los casos siguientes



de modo que, cada 6 dobleces, los vértices vuelven a su posición original. Entonces al doblar 2008 veces

$$2008 = 6 £ 334 + 4$$

se tiene la misma posición que al doblar 4 veces y los vértices estarán ubicados de la siguiente manera



Solución 18

Al obtener algunos términos realizando la divisi´on se puede constatar que se obtiene un número periódico, cuyo periodo es 6

$$1 ¥ 7 = 0; 142857142857:::$$

Entonces como 2000 = 333 £ 6 + 2, concluimos que el último número que Luciano obtuvo es 4.

Solución 19

Sea $\overline{abcd}$ la fecha de nacimiento y $\overline{dcba}$ la fecha invertida, luego

$$\begin{array}{c} dcba \\ \underline{abcd} \\ 1278 \end{array}$$

De donde se obtiene las siguientes ecuaciones

$$d ¡ a = 2 \qquad b ¡ c = 8$$

Las posibles soluciones para las ecuaciones son:

b	c
8	0
9	1

a	d
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9

Luego la fecha de nacimiento es 1803 y la fecha de muerte es 1903.

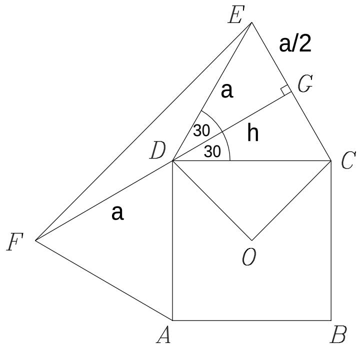
Solución 20

Sea abc el código que abre el candado. Como el producto de estas tres cifras es impar, entonces a; b y c deben ser impares, luego sus posibles valores son 1,2,3,4 o 5. Además como la suma debe ser un cuadrado perfecto, los valores posibles para la suma son 4,9,16 y 25, de estos posibles valores excluimos 4 y 16 ya que todas las cifras son impares.

Por lo tanto los posibles valores son (1, 3, 5) (1, 1, 7) (3, 3, 3) y (9, 9, 7) con todas las permutaciones de estos. Entonces existen el total $3! + \frac{3!}{2!}$ £ 2 + 1 = 13 códigos.

Solución 21

Sea a la longitud de uno de los lados del cuadrado, luego el área del triángulo DCO es igual a $\frac{1}{4}a^2$



Para calcular el área del triángulo FDE, prolongamos el lado FD hasta intersectar EC en el punto G, ya que los triángulos FDA y EDC son equiláteros el segmento $h = DG$ es perpendicular al lado EC, de donde el área del tri´angulo FDE es igual a:

$$\text{Area}(FDE) = \frac{1}{2}a\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Por lo que concluimos que las áreas de los triángulos EFD y DCO son iguales.

Solución 22

Hallemos el área de la región complemento a la del triángulo dado y tenemos

$$A = 4 £ 1 + 2 £ \frac{1}{2} £ 1 £ 3 + \frac{1}{2} £ 2 £ 4 = 11$$

entonces el área buscada es $4 £ 4$ ¡ $11 = 5$

Solución 23

Haciendo la cuentas que corresponden se obtienen dos resultados:

$$\begin{array}{rr} & 1035 \\ & 1035 \\ + & 1035 \\ & 1035 \\ & 1035 \\ \hline & 5175 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1025 \\ & 1025 \\ + & 1025 \\ & 1025 \\ & 1025 \\ \hline & 5125 \end{array}$$

Solución 24

(a)

Números de cubos unidad que tienen pintada

3 caras	2 caras	1 cara	0 caras
8	24	22	6

(b) Tenemos:

altura	$\frac{1}{4}$ número total de cubos	0 caras pintadas
3	15	6
4	20	12
5	25	18
6	30	24
7	35	30
8	40	36
9	45	42
10	50	48
11	55	54
12	60	60

luego si es posible construir un prisma recto en el que el número de cubos unidad con cero caras pintadas fuese la cuarta parte del número total de cubos unidad y se lo logra con uno de altura 12.

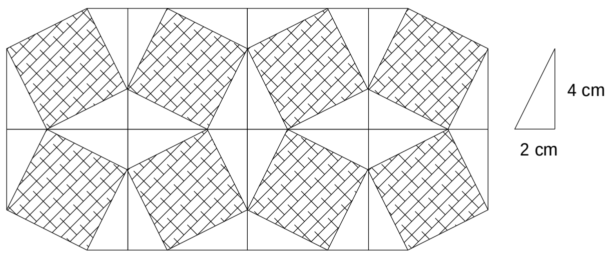
Solución 25

(a) En el primer piso hay 1, en el segundo hay 3^2; en el tercer hay 5^2 y en total hay $1 + 3^2 + 5^2 = 35$

(b) Hay $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 165$

Solución 26

De la figura se sigue:



el mosaico esta formado por 28 triángulo y 8 cuadrados cuyos lados son iguales a la hipotenusa del triángulo base,

$$\ell = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

entonces

$$A = 28\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4\right) + 8\left(\sqrt{20}\right)^2 = 272$$

Solución 27

Como $ZOO^2 = TOPAZ$; se sigue que Z corresponde a la cifra de las unidades del cuadrado de O; de donde se tienen las siguientes posibilidades

$$\begin{aligned}
ZOO &= 111\\
ZOO &= 422\\
ZOO &= 933\\
ZOO &= 644\\
ZOO &= 555\\
ZOO &= 666\\
ZOO &= 977\\
ZOO &= 488\\
ZOO &= 199
\end{aligned}$$

de donde se descartan la primera y sexta, por otro para que el producto tenga 5 cifra se tiene que la primera cifra debe ser a los mas 3 ya que $299^2 = 89401$ y $300^2 = 90000$ de donde solo queda

$$ZOO = 199$$

y se puede comprobar que $ZOO^2 = TOPAZ$ pues $199^2 = 39601$

Solución 28

Observemos que

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923076923076923076923076923\ldots$$

como los racionales son periódicos se observa que los dígitos periódicos son:

$$076923$$

y luego los cien primeros dígitos despues de la coma decimal cuando van en 6 en 6 lo hacen en grupos de $\frac{100}{6} \approx 16.6$ osea hasta el grupo 16 tenemos $16 \times 6 = 96$

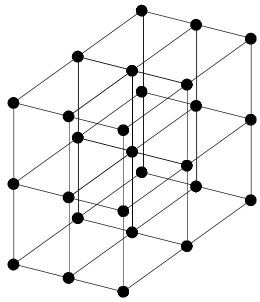
$$\underbrace{076923}_{\text{1er.}}\underbrace{076923}_{\text{2do.}}\underbrace{076923}_{\text{3er.}}\ldots\underbrace{076923}_{\text{16avo.}}\underbrace{076923}_{\text{17avo.}}$$

entonces tenemos la suma

$$S = 16(0 + 7 + 6 + 9 + 2 + 3) + 0 + 7 + 6 + 9 = 454$$

Solución 29

De la figura se sigue:



(i) Base : 12 varillas y 9 bolas
(ii) Para construir el primer piso:12 varillas, 9 bolas y 9 varillas
(iii) Para construir el segundo piso:12 varillas, 9 bolas y 9 varillas
Entondes para una construcción de cinco pisos se tienen: $12 + 5(12 + 9) = 117$ varillas y $9 + 5 \times 9 = 54$ bolas
Para una construicción de cien pisos se tienen: $12 + 100(12 + 9) = 2112$ varillas y $9 + 100 \times 9 = 909$ bolas

Solución 30
Vamos a estudiar los siguiente casos
Caso 1: cuando el primer dígito este mal, es decir

$$98765432x$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$24 + x - 20 = \dot{11}$$

de donde $x = 7$; sin embargo el número 987654327 al dividirse por 9 da como resto 6, luego la tecla 1 no es la que esta mal.
Caso 2: cuando el segundo dígito este mal, es decir

$$9876543x1$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$25 - 18 - x = \dot{11}$$

de donde $x = 7$; sin embargo el número 987654371 al dividirse por 9 da como resto 5, luego la tecla 2 no es la que esta mal.
Caso 3: cuando el tercer dígito este mal, es decir

$$987654x21$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$22 + x - 20 = \dot{11}$$

de donde $x = 9$; sin embargo el número 987654921 al dividirse por 9 da como resto 6, luego la tecla 3 no es la que esta mal.

Caso 4: cuando el cuarto dígito este mal, es decir

$$98765x321$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$25 - 16 - x = \dot{11}$$

de donde $x = 9$; sin embargo el número 987659321 al dividirse por 9 da como resto 5, luego la tecla 4 no es la que esta mal.

Caso 5: cuando el quinto dígito este mal, es decir

$$9876x4321$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$20 + x - 20 = \dot{11}$$

de donde $x = 0$; sin embargo el número 987604321 al dividirse por 9 da como resto 4, luego la tecla 5 no es la que esta mal.

Caso 6: cuando el sexto dígito este mal, es decir

$$987x54321$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$25 - 14 - x = \dot{11}$$

de donde $x = 0$; sin embargo el número 987054321 al dividirse por 9 da como resto 3, luego la tecla 6 es la que esta mal.

Caso 7: cuando el septimo dígito este mal, es decir

$$98x654321$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$18 + x - 20 = \dot{11}$$

de donde $x = 2$; sin embargo el número 982654321 al dividirse por 9 da como resto 4, luego la tecla 7 no es la que esta mal.

Caso 8: cuando el octavo dígito este mal, es decir

$$9x7654321$$

como este número es divisible por 11 se tiene

$$25 - 12 - x = \dot{11}$$

de donde $x = 2$; sin embargo el número 927654321 al dividirse por 9 da como resto 3, luego la tecla 8 es la que esta mal.

Caso 9: cuando el noveno dígito este mal, es decir

$$x87654321$$

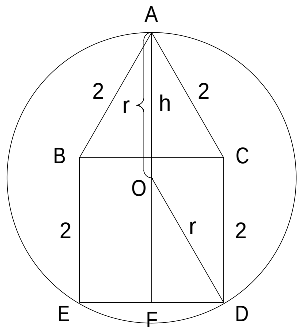
como este número es divisible por 11 se tiene

$$16 - 20 - x = \dot{11}$$

de donde $x = 4$; sin embargo el número 487654321 al dividirse por 9 da como resto 4, luego la tecla 9 no es la que esta mal.

Solución 31

De la figura se sigue



$$\overline{AF} = h + \overline{BE} = \sqrt{2^2 - 1^2} + 2 = \sqrt{3} + 2$$

$$\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF} = r + \sqrt{r^2 - 1^2}$$

de donde

$$\sqrt{3} + 2 = r + \sqrt{r^2 - 1^2}$$

por simple inspección se puede ver que $r = 2$ satisface esta ecuación, el cual es el valor buscado.

Solución 32

Los amigos dicen:

1er. amigo: 14,20,26,...
2do. amigo: 16,22,28,...
3er. amigo: 19,25,31,...

observemos que los números 14,20,26,... tiene por ley de formación $14 + 6t$, donde t es un número natural, y como $14 + 6t = 602$ para $t = 98$, sigue que Patricia es el primer amigo. De la misma forma los números 16,22,28,... tienen por ley de formación $16 + 6t$, donde t es un número natural, y como $16 + 6t = 40$ para $t = 4$, sigue que Juan es el segundo amigo. Análogamente los números 19,25,31,... tienen por ley de formación $19 + 6t$, donde t es un número natural, y como $19 + 6t = 61$ para $t = 7$, sigue que Esteban es el tercer amigo. Por otro lado $14 + 6t = 2006$ para $t = 332$ de donde se tiene que Patricia es la que dice 2006.

Solución 33

Como cada bloque pequeño pesa 2/3 de uno grande, 8 bloques pequeños pesarán $8£\frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ veces lo que pesa un bloque grande. Como todos juntos pesan 34 kilos, se tiene:

$$(6 + 16=3) \text{ de peso de cada bloque grande} = 34 \text{ kilos}$$

es decir

$$34/3 \text{ de peso de cada bloque grande} = 34 \text{ kilos}$$

de donde

$$\text{cada bloque grande pesa 3kilos}$$

y por tanto:

$$\text{cada bloque pequeño pesa 2 kilos}$$

Por otro lado para disponer los bloques en cada brazo de la balanza se tiene dos posibilidades:
3 bloques grandes y 4 bloques pequeños en cada lado de la balanza
5 bloque grandes y un bloque pequeño en un lado y 7 pequeños y uno grande en el otro.

Solución 34

Vamos contar cuadrados de lados 1,2,3 y 4
lado 1, hay 38
lado 2, hay 21
lado 3, hay 6
lado 4, hay 1
en total existen 66 cuadrados.

Solución 35

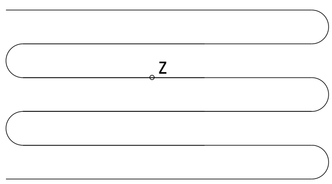
Primer tiempo de encuentro, considerando en grá…co tenemos

$$\frac{x}{50} = \frac{100 + 100 \text{ ¡ } x}{70}$$

de donde tenemos $x = \frac{250}{3}$ y el tiempo es $t = \frac{x}{50} = \frac{5}{3}$ minutos. Segundo encuentro, del grá…co tenemos

$$\frac{100 + y}{50} = \frac{200 + 100 \text{ ¡ } y}{70}$$

de donde tenemos $y = \frac{200}{3}$ y el tiempo es $t = \frac{y+100}{50} = \frac{10}{3}$ minutos. Tercer encuentro, del grá…co tenemos

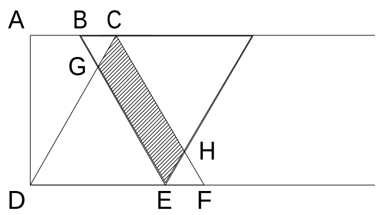


$$\frac{200+z}{50} = \frac{300+100-z}{70}$$

de donde como antes tenemos $z = 50$ y el tiempo es $t = \frac{z+200}{50} = 5$ minutos.

Solución 36

De acuerdo al gráfico tenemos:



Sea $\overline{AB} = x$,entonces $\overline{BC} = \frac{\ell}{2} - x$ donde ℓ es el lado del triángulo isósceles. El cual verifica de acuerdo al teorema de Pitágoras

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + 8^2$$

ya que la altura de cada triángulo es 8 y se tiene $\ell = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Por otro lado el segmento $\overline{BE}$ es paralelo a $\overline{CF}$ ya que los triángulos definen ángulos alternos iguales, entonces los triángulos DGE y HEF son equiláteros, también obsérvese que $\overline{EF} = \frac{\ell}{2} - x$ y $\overline{DE} = \ell - \left(\frac{\ell}{2} - x\right) = \frac{\ell}{2} + x$, y usando la fórmula del área de un triángulo isósceles de lado a, igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, tenemos

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\ell}{2} + x\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2 + \frac{1}{5}\frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64}{\sqrt{3}}$$

simplificando

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\ell^2}{2} + 2x^2\right) = \frac{265}{5\sqrt{3}}$$

reemplazando el valor de $\ell = \frac{16}{\sqrt{3}}$ y simplificando tenemos

$$\frac{128}{3} + 2x^2 = \frac{4 \cdot 256}{15}$$

de donde finalmente tenemos:

$$x = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Solución 37

Tenemos las siguientes observaciones:

1ra. Fila: empieza en 1 y termina en 1=1+(1-1)
2da. Fila: empieza en 2 y termina en 3=2+(2-1)
3ra. Fila: empieza en 4 y termina en 6=4+(3-1)
4ta. Fila: empieza en 7 y termina en 10=7+(4-1)

5ta. Fila: empieza en 11 y termina en 15=11+(5-1)
...
2006 fila : empieza en a y termina en $b = a + (2006 - 1)$
Así que las suma de esta fila será:

$$\begin{aligned} S &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + b \\ &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + a + (2006 - 1) \end{aligned}$$

observe que en cada fila hay un número de sumandos igual a la propia fila:

$$S = \underbrace{a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+2005)}_{2006}$$

$$S = a + a + \ldots + a + 1 + 2 + \ldots + 2005 = 2006a + 2011015 \qquad (*)$$

Finalmente falta determinar en que número empieza la fila 2006, para ello tenemos la siguiente regularidad
1ra. Fila: empieza en 1
2da. Fila: empieza en 2 =1+1
3ra. Fila: empieza en 4 =2+2=2+1+1
4ta. Fila: empieza en 7 =4+3=3+2+1+1
5ta. Fila: empieza en 11=7+4=4+3+2+1+1
para la fila 2006 tenemos:

$$a = (2006 - 1) + \ldots + 2 + 1 + 1 = 1 + \frac{2005 \times 2006}{2} = 1 + 2005 \times 1003 = 2011016$$

reemplazando en (*) tenemos

$$S = 2006 \times 2011016 = 403609111$$

Solución 38
Observe que

$$\begin{aligned} 9 &= 10 - 1 \\ 99 &= 100 - 1 \\ 999 &= 1000 - 1 \\ &\vdots \\ N &= \underbrace{999\ldots9}_{2006} = 10^{2006} - 1 \end{aligned}$$

Luego

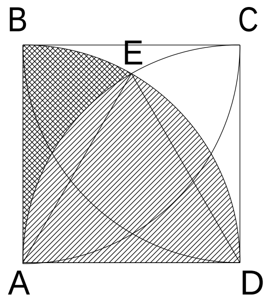
$$\begin{aligned} N^2 &= \left(10^{2006} - 1\right)^2 = 10^{4012} - 2 \times 10^{2006} + 1 \\ &= 10^{2006}\left(10^{2006} - 2\right) + 1 = 10^{2006}\left(\underbrace{999\ldots98}_{2006}\right) + 1 \\ &= 999\ldots98000\ldots0 + 1 = 999\ldots98000\ldots01 \end{aligned}$$

de donde tenemos que la suma de los dígitos de N^2 es

$$\underbrace{9+9+9+\cdots+9}_{2005}+8+1=9\times 2006=18054$$

Solución 39

De acuerdo al gráfico tenemos



Vamos a calcular el área del triángulo curvilíneo ABE (área cuadriculada), ya que restando del área del cuadrado, cuatro veces el área de uno de estos triángulos curvilíneos tendremos el cuadrado curvilíneo dado.

Sea ℓ el lado del cuadrado, el triángulo AED es equilátero pues $\overline{AE}=\overline{ED}=\ell$ y tiene área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, el área del sector circular AED es $\frac{\pi\ell^2}{6}$ y el área del segmento circular AE tiene área igual a $\frac{\pi\ell^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, entonces el área del cuarto círculo tiene área

$$\frac{\pi\ell^2}{4}=\text{área del triángulo curvilineo}+2\left(\frac{\pi\ell^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

de donde

$$\text{área del triángulo curvilineo}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}\ell^2$$

Luego el área del cuadrado curvilíneo es igual a

$$\text{área del cuadrado curvilineo}=\ell^2-4\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}\ell^2=\frac{3-3\sqrt{3}+\pi}{3}\ell^2$$

por hipótesis este cuadrado curvilíneo tiene área $9-9\sqrt{3}+3\pi$, de donde

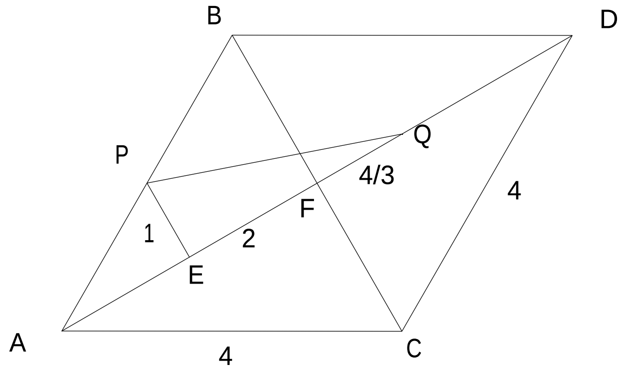
$$9-9\sqrt{3}+3\pi=\frac{3-3\sqrt{3}+\pi}{3}\ell^2$$

de donde se tiene $\ell=3$.

Solución 40

Consideremos dos caras del tatraedro, las cuales se disponen como en la figura, entonces la mínima distancia que recorre la hormiga es el segmento que une P y Q: El punto Q esta en el centro del triángulo BDC; luego esta en el segmento $\overline{FD}$ y corresponde al baricentro luego $\overline{FQ} = \frac{1}{3}\overline{FD} = \frac{4}{3}$; por otro lado P es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{PE}$ es paralelo a $\overline{BF}$ así que $\overline{PE} = \frac{1}{2}\overline{BF} = 1$; tambien $\overline{EF} = 2$, finalmente usando el teorema de Pitagoras tenemos

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + \left(2 + \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{109}$$



Solución 41

Sea x el lado del triángulo A, $\frac{x}{2}$ será el lado de triángulo B, $\frac{x}{4}$ será el lado de triángulo C, y $\frac{x}{8}$ es el lado del triángulo D. Como el perímetro de la figura es 48 se tiene:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{3x}{8} &= 48 \\ \frac{31}{8}x &= 48 \end{aligned}$$

resolviendo $x = \frac{384}{31}$: El área de un triángulo equilátero de lado x es igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; entonces el area total será igual a

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{8}\right)^2 \\ = &\frac{85\sqrt{3}}{256}x^2 = \frac{85\sqrt{3}}{256}\left(\frac{384}{31}\right)^2 = \frac{48960}{961}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 42

La sucesión de Pedro es la siguiente:

$$46248326122483261224832612 24 \ldots$$

se observa que los números: 48326122 aparecen periódicamente y así el dígito de posición 2006 será tal que contando a los 3 primeros (es decir 462), se debe dar

$$2003 = 8 \times 250 + 3$$

es decir el dígito que ocupa la posición 2006 es el tercero del grupo periódico es decir 3.

Solución 43

Evidentemente el número es divisible por 2, ya que acaba en una cifra par. Falta ver si es divisible por 9. Por el criterio de divisibilidad, necesitamos probar si la suma de los dígitos es divisible por 9. Calculemos esa suma

$$1 + 2 + \cdots + 98 = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot (1 + 98) = 7^2 \cdot 9 \cdot 11$$

Este resultado sí es divisible por 9, entonces lo mismo nuestro número:

Solución 44

Cada piso se construye con *pilares* de dos cartas, usando la misma cantidad de pilares que el nivel del piso a construir. Para el caso 2006 se necesitará entonces

$$2(1 + 2 + \cdots + 2006) = 2006 \cdot 2007$$

Aparte de los pilares, se necesita las bases para estos pilares, tomando en cuenta que el nivel final no usa ninguna base. Como se usa una carta para cada pilar, hay que contar cuántos pilares hay desde el nivel 1 al 2005

$$1 + 2 + \cdots + 2005 = \frac{1}{2} \cdot 2005 \cdot 2006$$

Entonces en total se usarán 6037 057 cartas para la torre de 2006:

Solución 45

Los números del 1 al 9 aportan con un sólo dígito. Los del 10 al 99, con dos. Los del 100 al 999 con tres. A partir del 1000 hasta el 2006, el aporte es de cuatro cifras. Entonces en total hay

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot (2006 - 1000 + 1) = 6917$$

Para ver qué cifra ocupa la posición 2006, hay que ver si se va a necesitar contar números con tres o cuatro cifras. La cantidad total de cifras a la que se llega hasta 999, es

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$$

Es decir, se cubre la posición 2006. Partamos ahora de este dígito de la posición 2889, que viene a ser el nueve final del número 999. Para llegar al dígito 2006, habría que retroceder 883 posiciones. Se trata del sector de números que aportan tres cifras, es decir, hay que retroceder 294 números más un dígito

$$883 = 3 \cdot 294 + 1$$

Al retroceder 294 números a partir de 999, llegamos al número 705, y al retroceder un dígito más, estaríamos hablando justo de la última cifra de 705, es decir, 5.

Solución 46

Capítulo 3

Problemas Olimpiada Matemática “Euler y Departamental”

Ejercicio 1 La suma de 19 números pares consecutivos es 2128, halle el mayor de dichos números.

Ejercicio 2 En una de las escuelas de Danzig, Alemania, en 1876, alguien había escrito en la pizarra

$$(555555555555555111111111111111 + 1)^2 - (444444444444444444444444444444 + 444444444444444)^2$$

Los alumnos empezaron a hacer cálculos y algunos decían que este número terminaba en demasiados ceros, y que era muy difícil determinarlo. Uno de los estudiantes que acababa de entrar al curso, llamado Euler, después de reflexionar un poco aseveró que el número acababa *exactamente* en 30 ceros. ¿Cómo tuvo Euler que razonar para obtener este resultado?

Ejercicio 3 ¿Cuántos dígitos 2 se necesitan para escribir todos los números enteros desde el 1 hasta el 102000?

Ejercicio 4 Sea en número:

$$N = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{2009 \text{ nueves}}$$

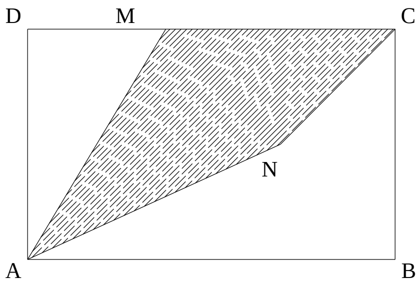
donde cada sumando tiene un dígito 9 más que el anterior y el último sumando es el número formado por 2009 dígitos iguales a 9. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N?

Ejercicio 5 Joaquín, que de pequeño había tenido problemas al aprender los números, tenía la manía compulsiva de borrar o tachar cada vez que veía un cierto número, una cierta cifra que lo tenía enloquecido. En la biblioteca, mientras leía un libro clásico de aritmética del matemático Euler, observó una igualdad numérica especial, y no pudo resistir el tachar la odiosa cifra, quedando escrito

$$\blacksquare\blacksquare 33 = (\blacksquare\blacksquare)^2 + 33^2$$

¿Es posible saber cuál era la odiosa cifra?. Nota cada cuadrado negro representa la cifra odiosa que Joaqui tachó.

Ejercicio 6 El rectángulo $ABCD$, es tal que $5\overline{AB} = 6\overline{BC}$, M es un punto de $\overline{CD}$ tal que $\overline{MC} = \overline{BC}$, N es el punto medio de $\overline{MB}$, ¿Qué fracción del rectángulo $ABCD$ representa el cuadrilátero $AMCN$?

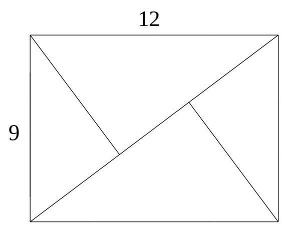


Ejercicio 7 Sea en número:

$$N = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{9999\cdots9}_{2009 \text{ dígitos}}$$

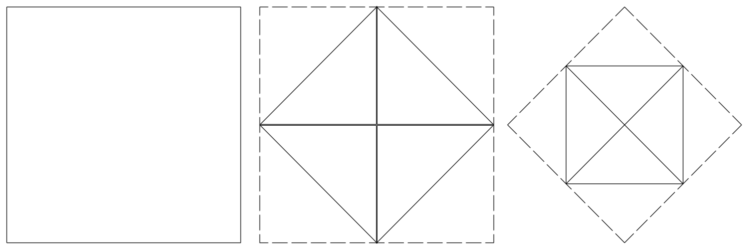
donde cada sumando tiene un dígito 9 más que el anterior y el último sumando es el número formado por 2009 dígitos iguales a 9. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N?

Ejercicio 8 Al plegar una hoja rectangular se obtuvo un rectángulo de 9cm por 12 cm, como muestra la figura.



Calcular las dimensiones de la hoja antes de plegarse.

Ejercicio 9 Se tiene un cuadrado de lado 1024 cm, $\left(2^{10} = 1024\right)$ por cada etapa se unen sus cuatro vértices con el centro y se tiene un nuevo cuadrado, se repite este proceso muchas veces, en la figura se tienen dos etapas:



luego de cuántas etapas se tendrá un cuadradito tal que este pueda caber en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ cm.

Ejercicio 10 Encontrar, si es que existe, un entero positivo n de manera que se cumple

$$\frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n} = \frac{2009}{2010}$$

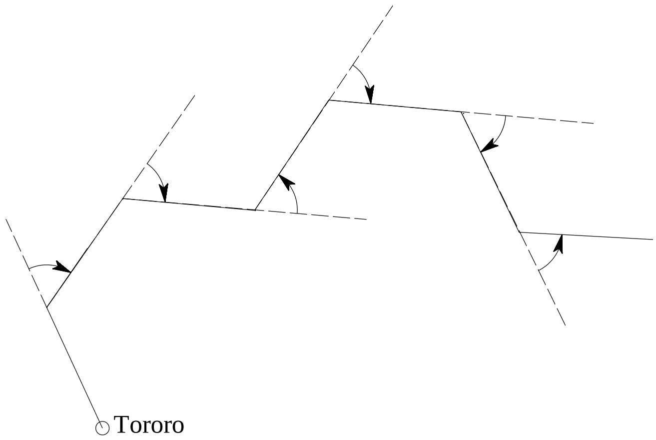
Ejercicio 11 Encontrar tres números de la sucesión

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}; \\ a_1 &= \frac{1}{2} + 1; \\ a_2 &= \frac{1}{2} + 2; \\ a_3 &= \frac{1}{2} + 3; \\ &\vdots \end{aligned}$$

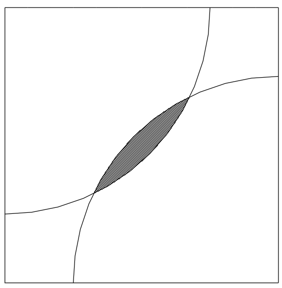
que estén en progresión geométrica.

Ejercicio 12Un arqueólogo, de visita en Tororo, decide hacer un paseo por el lugar. El paseo se

realiza por etapas. Cada etapa consta de 3 segmentos, cada uno de ellos de longitud 100m, y dos giros de 60^0 a la derecha, como se muestra en la figura. Entre el último segmento de una etapa y el primero de la siguiente, se hace un giro a la izquierda de 60^0. ¿A qué distancia estará el arqueólogo del punto inicial después de haber recorrido 1930 etapas?



Ejercicio 13 El cuadrado de la …gura tiene perímetro 48 y las dos cuartas circunferencias tienen radio 9 cada una, hallar el área sombreada

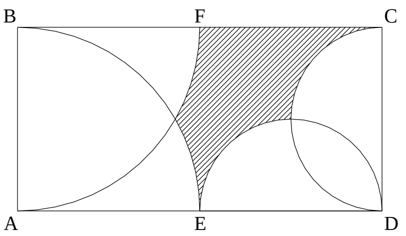


Ejercicio 14 Se disponen los números naturales según la siguientes …gura:

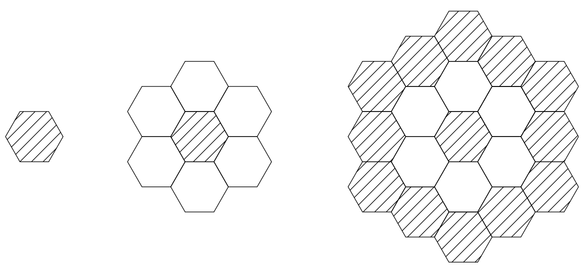
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰
36	35	34	33	32	31	···
17	18	19	20	21	30	···
16	15	14	13	22	29	···
5	6	7	12	23	28	···
4	3	8	11	24	27	···
1	2	9	10	25	26	···

Hallar las coordenadas del número 2009 en la disposición anterior, por ejemplo el número 22 tiene por coordenadas $(5;4)$:

Ejercicio 15 El rectángulo $ABCD$ tiene 96 cm de perímetro. Los arcos AF y BE son cuartos de circunferencias. Los arcos CD y DE son semicircunferencias y $\overline{AE} = \overline{ED}$. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



Ejercicio 16 Observa cómo las abejas comienzan a construir su panal: crece en capas. ¿Cuántas aristas hay en el borde de la capa 2009?



Ejercicio 17 Carlos escribe una lista de todos los números menores que 10000 los cuales tienen exactamente dos unos juntos. Hallar cuántos números tiene Carlos en la lista.

Ejercicio 18 Se escriben en una lista los múltiplos de 7 y de 8 de la siguiente forma: 7, 8, 14, 16, 21, 24, . . . , y los números que sean múltiplos comunes se escriben una sola vez. ¿Qué numero aparece en la posición 2009?

Ejercicio 19 En un desierto, hay serpientes, ratones y alacranes. Cada mañana cada serpiente se come un ratón, cada mediodía, cada alacrán mata una serpiente y cada noche, cada ratón se come a un alacrán. Si despues de cinco días queda solamente un ratón, ¿cuántos ratones había al inicio?

Ejercicio 20 Hallar todos los números de cinco dígitos de la forma: 65x1y; los cuales son múltiplos de 12.

Ejercicio 21 Un papel de forma cuadrada de 20 cm. de lado tiene una cara de color gris y la otra cara de color blanco. Dividimos cada lado en cuatro partes iguales y doblamos las puntas del cuadrado por los segmentos punteados que se indican en la …gura 1, con lo que obtenemos la situación de la …gura 2. Calcula la super…cie del cuadrado gris en la …gura 2.

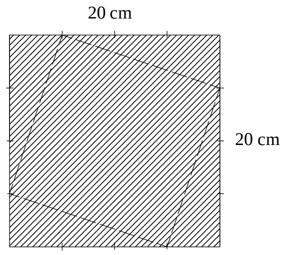


Figura 1

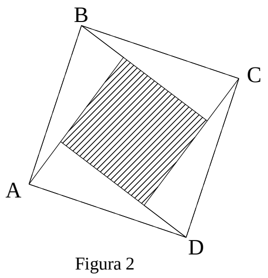
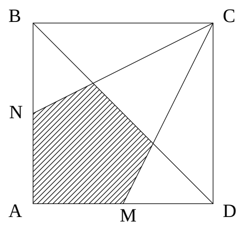


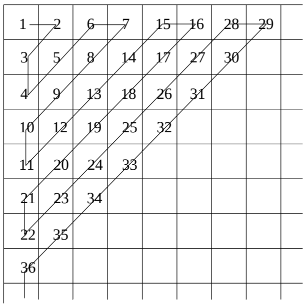
Figura 2

Ejercicio 22 Una banda Cocanis Centralistas está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de …las, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de …las. ¿Cuántos músicos tiene la banda?

Ejercicio 23 Hallar el área sombreada, sabiendo que N y M son puntos medios del cuadrado ABCD; el cual tiene lado 3cm.



Ejercicio 24 Se disponen los números naturales como indica el grá…co adjunto:



Se pide determinar debajo que número de la primera …la se encuentra 2010, por ejemplo 32 esta debajo de 15.

Ejercicio 25 Se denota con $P(n)$ y con $S(n)$ el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos del entero positivo n. Por ejemplo: $P(30) = 0$ y $S(341) = 8$. Encontrar todos los número n de dos cifras tal que $P(n) + S(n) = n$

Ejercicio 26 En cada planeta de un sistema solar con once planetas hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

Ejercicio 27 Sean $x; y$ números reales tales que

$$x; \quad x + 2y; \quad 2x + y$$

forman una progresión aritmética y

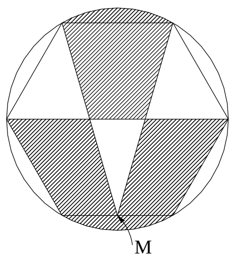
$$(y + 1)^2; \quad xy + 25; \quad (x + 1)^2$$

forman una progresión geométrica, hallar x e y:

Ejercicio 28 ¿Cuántos números enteros positivos menores que 2009 hay, tales que sus cifras son diferentes y suman 7? Hacer la lista de tales números.

Ejercicio 29 Cual es el dígito de las unidades del número $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2009}$

Ejercicio 30 Hallar el área sombreada donde M es el punto medio y la circunferencia tiene radio 2:



Ejercicio 31 Encuentre todos los valores entero positivos de x para los que se cumple que $\frac{x + 99}{x + 19}$ es un número entero.

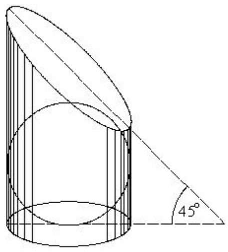
Ejercicio 32 El número 30a0b03 en notación decimal es divisible por 13. Encuentre los posibles valores de los dígitos a y b:

Ejercicio 33 Sea la siguiente sucesión

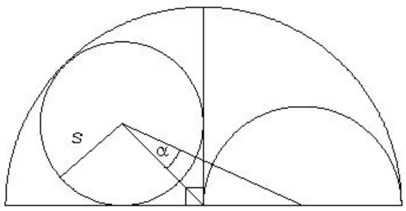
$$\begin{aligned}
a_1 &= 2008 \\
a_2 &= 2200802008020088 \\
a_3 &= 22008220080200802008820080200822008020080200882008020082200802008020088 \\
&\quad 2008820082200802008020088 \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Observe que esta sucesión tiene la siguiente ley de formación, a partir de 2008 se inserta 2008 entre cada dígito del número de la sucesión anterior. Hallar una fórmula para el número de dígitos del término.

Ejercicio 34 Basados en el grá…co, hallar el volumen del tronco del cilindro circunscrito a la esfera de radio .



Ejercicio 35 En la …gura, las dos semicircunferencias tienen diámetro r y 2r respectivamente. La circunferencia pequeña tiene radio s. Hallar cot(®).



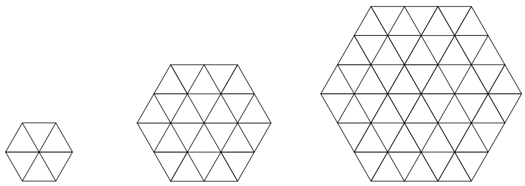
Ejercicio 36 Un número positivo es *del año* si puede ser expresado como suma de 2008 números enteros consecutivos, no necesariamente positivos. ¿Cuál es el segundo número *del año*?

Ejercicio 37 Encontrar todos los pares de enteros positivos diferentes $(A; B)$ que satisfacen $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{30}$

Ejercicio 38 Determinar la cifra de las unidades del número:

$$1 + 6 + 9 + 6^2 + 9^2 + 6^3 + 9^3 + ::: + 6^{2008} + 9^{2008}$$

Ejercicio 39 Se tiene la siguiente sucesión de hexágonos:



1ro. 2do. 3ro.

Como se ve estos polígonos se construyen con triángulos equiláteros de lado 1 cm, se tienen dos preguntas para el polígono de lugar 2008

(i) ¿cual es su perímetro?

(ii) ¿cuál es su área?

Ejercicio 40 Un juego consiste de 25 botones luminosos (de color verde o rojo) dispuestos de la siguiente manera:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2
6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
21^2	22^2	23^2	24	25^2

Si se aprieta un botón del borde del cuadrado cambian de color él y todos sus vecinos, y si se aprieta un botón del centro cambian de color todos sus vecinos pero él no. Por ejemplo, al presionar el botón 19 se tiene que

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	*	*	*
2	2	*	2	*
2	2	*	*	*

¿Es posible (apretando sucesivamente algunos botones) encender todas las luces con color verde, si inicialmente estaban todas encendidas con luz roja? Justi…que la respuesta.

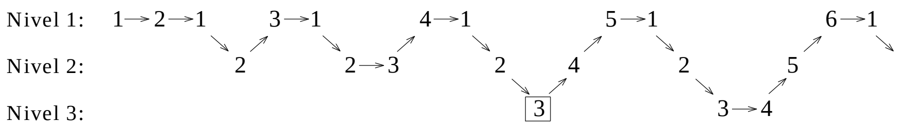
Ejercicio 41 Considere 10 números enteros positivos, no necesariamente distintos, que sumen 95. Encuentre el menor valor posible de la suma de sus cuadrados.

Ejercicio 42 Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes externamente entre si y tangentes a una recta L por el mismo lado. Desde el punto P de mayor altura respecto a L en C_1 se traza una tangente “superior” $\overline{PQ}$ a C_2. Pruebe que la longitud de $\overline{PQ}$ es igual al diámetro de C_1.

Ejercicio 43 Hallar la suma $2 + 22 + 222 + \cdots + \underbrace{22\ldots22}_{2008 - \text{dos}}$; donde el último número tiene 2008 dígitos dos.

Ejercicio 44 Un acuario de forma de un paralelepipedo rectangular de altura 30 cm esta ubicado sobr una mesa. El acuario es llenado con agua al máximo, luego se lo hace girar alrededor de una de las aristas de la base, hasta que en el fondo forma un ángulo de 45^o con el plano de la mesa. Un tercio e su contenido se derrama. Una vez más el acuario se llena con agua al máximo, luego se lo hace girar alrededor de la otra arista de la base hasta que en el fondo forme un ángulo de 45^0 con el plano de la mesa, cuatro quintos del contenido se derraman. ¿Cual es el contenido del acuario?

Ejercicio 45 Se construye una sucesión de números siguiendo el siguiente patron:

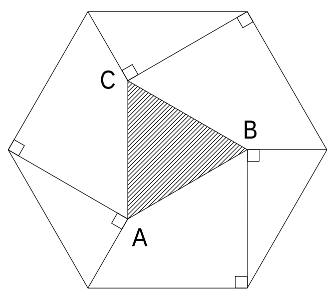


En esta parte de la sucesión el elemento en la posición 12 de la sucesión es el número 3(en recuadro) y se encuentra en el nivel 3. Se pide determinar el elemento en la posición 2008 y el nivel en el cual se encontrará

Ejercicio 46 Como puedes ver el número $N = 2\underbrace{00\ldots00}_{x}7$ empieza con 2, termina con 7 y tiene un número x de ceros. Determine el número de ceros tal que N^2 tenga exactamente 2007 cifras.

Ejercicio 47 En la siguiente figura, ¿cuál es el área del triángulo , si el área del hexágono regular es 49 ?

Nota: los cuadraditos pequeños colocados en un ángulo dado indican que ese ángulo es recto.



Ejercicio 48 Juan nació antes del año 2000. El 25 de Agosto del 2001 cumplió tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento. Determina su fecha de nacimiento.

Ejercicio 49 Los números enteros mayores que 1 son ordenados de la siguiente forma:

	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	18	19	20	21
		$\vdots$		

¿En qué columna aparece el 2007.

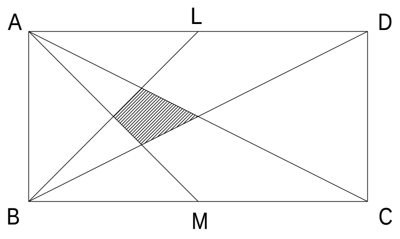
Ejercicio 50 Un robot tiene una forma rara de desplazarse. Cada vez que se le ordena "caminar" efectúa los siguientes 4 movimientos:

Un metro hacia delante y gira 90º hacia la derecha; dos metros hacia delante y gira 90º hacia la derecha; un metro hacia delante y gira 90º hacia la izquierda; un metro hacia atrás y gira 90º hacia la izquierda. Luego se detiene a esperar nuevas instrucciones.

Después de 2007 movimientos, calcular en metros la longitud del segmento determinado por el punto de partida del robot y su última posición.

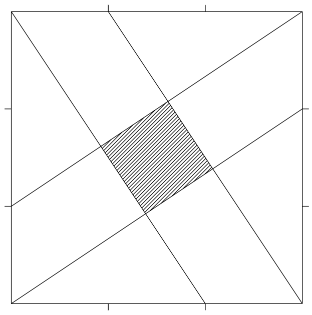
Ejercicio 51 Determinar todos los números de dos cifras que sea igual al triple de la multiplicación de sus cifras.

Ejercicio 52 Si $ABCD$ es un rectángulo de base 2 y altura 1, y L y M son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{MC}$ respectivamente, ¿cuál es el área de la región rayada?

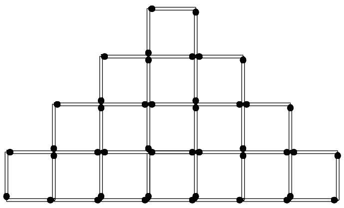


Ejercicio 53 Todos los números del 19 al 80 son escritos uno después del otro para formar el número 19202122...7980. ¿Es este número divisible entre 1980? Explique su respuesta.

Ejercicio 54 ¿Qué fracción del total de la super…cie del cuadrado grande representa la zona rayada? Observe que cada lado se dividió en tres partes.



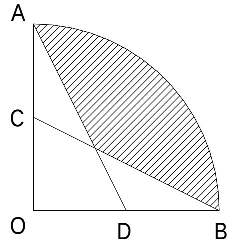
Ejercicio 55 Se construye la siguiente …gura plana usando para cada lado un (único) palito de fosforo, en la …gura adjunta se usarón 43 palitos y tiene 4 pisos, con 701 palitos cuántos pisos se pueden construir?



Ejercicio 56 ¿Cuántos números naturales (sin el cero) menores a diez mil son múltiplos de nueve y están formados exclusivamente por dígitos 2 y 3?

Ejercicio 57 Se construye el siguiente número $N = 122333444455555:::$¿Cuál es el dígito que ocupa el lugar 1935?

Ejercicio 58 ¿Cuál es el valor del área sombreada?, si el arco AB es el arco de una cuarta circunferencia de radio 4, los puntos C y D son los puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y E es el punto donde se cortan los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$



Ejercicio 59 ¿Cuánto vale el siguiente número?

$$\frac{2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - 2004^2 + 2003^2 - 2002^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1}{2007 - 2006 + 2005 - 2004 + 2003 - 2002 + \ldots + 3 - 2 + 1}$$

Ejercicio 60 ¿Cuántas parejas $(x; y)$, son solución para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ x^3 - xy^2 - x^2y + x - y + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 61 Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras tres. ¿Cuál es el radio de la esfera más pequeña que contiene a la cuatro canicas ?

Ejercicio 62 Sabemos que 100 factorial (100!) es la cantidad que se obtiene del siguiente modo:

$$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Calcular el exponente de la potencia máxima de 3 que sea divisor de 100!

Ejercicio 63 Utilizando solamente los dígitos 2 y se forma el siguiente número de 90 cifras:

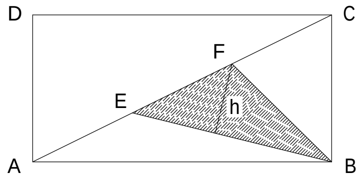
$$2a22a222a2222a22222a\ldots$$

cuando este número ha de ser múltiplo de 9, hallar todos los posibles valores para a.

Ejercicio 64 Los números del 1 adelante están escritos en forma de espiral como se puede ver más abajo. El 51 por ejemplo está en la 4ª columna a la izquierda de 1 que inicia la serie y dos filas por debajo. Si continuamos la serie, ¿dónde estará el 2007?

		31	32	33	34	35	36	37	
		30	13	14	15	16	17	38	
		29	12	3	4	5	18	39	
		28	11	2	1	6	19	40	
	$\vdots$	27	10	9	8	7	20	41	
	51	26	25	24	23	22	21	42	
	50	49	48	47	46	45	44	43	

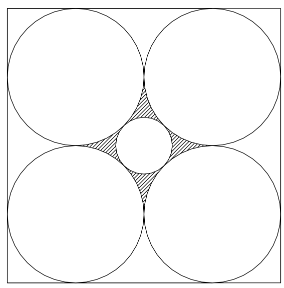
Ejercicio 65 La longitud del rectángulo ABCD es 8 y su ancho 3. Dividimos la diagonal AC en tres partes iguales mediante los puntos E y F. ¿Cuánto mide la altura h, del triángulo EFB trazada desde el vértice F?



Ejercicio 66 Considera una cuadrícula de 300£200. ¿A cuántos cuadros de 1£1 corta a una diagonal de esta cuadrícula?

Ejercicio 67 ¿Cuántas cifras tiene el número $(999::;9)^2$ ¡ 1?

Ejercicio 68 . Cuatro …chas circulares iguales se tocan entre sí, tal y como se ve en el cuadrado de lado ` = a, ver …gura. Averigua el radio de la …cha central y el área rayada.



Ejercicio 69 Matías tiene una cierta cantidad de ladrillos cúbicos todos iguales.

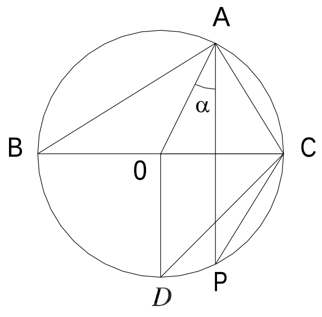
Cuando quiere construir una pared cuadrada, le faltan o le sobran ladrillos. Lo mismo le ocurre si quiere armar un cubo.

Nicolás tiene el doble de ladrillos que Matías y puede construir una pared cuadrada usando todos los ladrillos.

Marcela tiene el triple de ladrillos que Matías y puede armar un cubo usando todos los ladrillos.

¿Cuál es el menor número de ladrillos que puede tener Matías?

Ejercicio 70 Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O como se muestra en la …gura Sean D y P las intersecciones con la circunferencia de las rectas perpendiculares a BC trazadas desde O y A respectivamente. Si el ángulo $D\hat{C}P = 15^0$. ¿Cuánto mide el ángulo α?



Ejercicio 71 Sea a_n una progresión aritmética con diferencia común 3 y primer término a_1, pruebe:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{2006}}+\sqrt{a_{2007}}}=\frac{2006}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}$$

Ejercicio 72 Prueba que si los números $\log_a(x)$, $\log_b(x)$ y $\log_c(x)$ con $x \neq 1$ están en progresión aritmética, entonces

$$c^2 = (ac)^{\log_a b}$$

Ejercicio 73 Determinar la cifra de las decenas del número:

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2007!$$

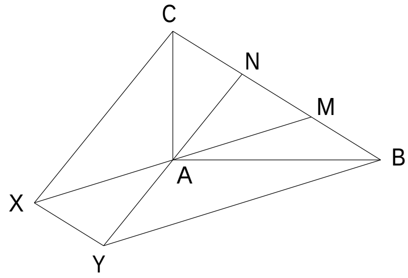
Ejercicio 74 Sean a y b entero positivos tal que a es mayor que b , probar que las raíces de la ecuación

$$x^2 = \left(a^2 - a + 1\right)\left(x - b^2 - 1\right) + \left(b^2 + 1\right)^2$$

son enteros positivos.

Ejercicio 75 Sea α, β y γ ángulos de un triángulo, probar que si $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ entonces el triángulo es rectángulo.

Ejercicio 76 Sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC, recto en A, se escogen puntos M y N tales que $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$ como se muestra en el gráfico. Los puntos X y Y se encuentran sobre las rectas $\overline{MA}$ y $\overline{NA}$ respectivamente tal que $\overline{XA} = \overline{AM}$ y $\overline{YA} = \overline{AN}$. Si el área de ABC es 270, hallar el área del cuadrilátero $XYBC$.



Ejercicio 77 Escogemos dos números enteros entre 1 y 100 tales que la diferencia es 7 y el producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras se pueden escoger dichos números?

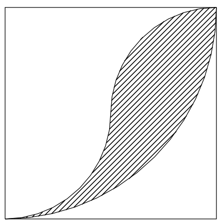
Ejercicio 78 Usando los dígitos 1,2,3,4 y 5 exactamente una vez se construyen números de 5 dígitos los cuales se suman, es decir

$$12345 + 12354 + ::: + 54321$$

calcula el valor de esta suma.

Ejercicio 79 Sean $x; y$ números reales tales que $x + y = 26$ y $x^3 + y^3 = 5408$; hallar $x^2 + y^2$:

Ejercicio 80 Calcula el área y el perímetro de la …gura sombreada. Si el lado del cuadrado mide 10 cm.



Nota: observe que la …gura esta compuesta de tres arcos los cuales son cuartos de circunferencia, los pequeños son iguales..

Ejercicio 81 Se tiene el siguiente triángulo de números:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & 2 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2^2 & & 2^2 & & 2^2 & & & & & & \\
 & & & & & 2^3 & & 2^3 & & 2^3 & & 2^3 & & & & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
2^{20} & & 2^{20} & & ¢¢¢ & & ¢¢¢ & & ¢¢¢ & & ¢¢¢ & & ¢¢¢ & & 2^{20} & & 2^{20}
\end{array}$$

Hallar la suma de todos los números que forman el triángulo.

Ejercicio 82 Se tiene un rectángulo de lados enteros m y n respectivamente, subdividido por rectas paralelas a los lados en mn cuadraditos de lado 1. Se trata de encontrar el número de cuadraditos que atraviezan una diagonal del rectángulo (no se cuentan aquellos cuadraditos que son tocados solo en un vértice por la diagonal)
(a) Resolver el problema cuando $m = 3$; $n = 5$
(b) Resolver el problema cuando $m = 7$; $n = 4$
(c) Inducir una solución del caso general en términos de m y n; justi…car la respuesta

Ejercicio 83 Demostrar que para todos los enteros a y b el número entero $c = a^3b$ ¡ ab^3 es divisible por 6.

Capítulo 4

Soluciones Olimpiada Matemática "Euler y Departamental"

Solución 1

Sea el primer numero par: $2x$
El segundo par consecutivo será: $2(x+1)$
El tercer par consecutivo será: $2(x+2)$
y así sucesivamente, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}&2x + 2(x+1) + 2(x+2) + 2(x+3) + 2(x+4) + 2(x+5) + 2(x+6) + 2(x+7)\\ &+2(x+8) + 2(x+9) + 2(x+10) + 2(x+11) + 2(x+12) + 2(x+13) + 2(x+14)\\ &+2(x+15) + 2(x+16) + 2(x+17) + 2(x+18) \;=\; 2128\end{aligned}$$

simpli…cando tenemos:

$$38x + 342 = 2128$$

de donde:

$$x = 47$$

como el último par era $2(x+18)$ para $x = 47$ tenemos 130.

Solución 2

Notemos que hay quince repeticiones del dígito 5 y quince del dígito 1, treinta de 4 en el primer número y luego quince de 4. Entonces podemos modi…car lo escrito del siguiente modo

$$\begin{aligned}&(5\ldots5\,1\ldots12)^2 - (4\ldots4\,8\ldots8)^2 =\\ &\underbrace{(5\ldots5\,1\ldots12 - 4\ldots4\,8\ldots8)}_{1\ldots4}\underbrace{(5\ldots5\,1\ldots12 + 4\ldots4\,8\ldots8)}_{10\ldots0}\end{aligned}$$

siendo el primer factor un número de treinta cifras con última cifra 4, y el segundo factor el número formado por un dígito 1 y treinta 0, lo que da *efectivamente* un número que acaba exactamente en treinta ceros.

Solución 3

Al escribir números de una cifra, aparece un solo 2.
Al escribir números de hasta dos cifras, cada grupo de diez aparece un nuevo 2, más los 2 iniciales de los números veinte al veintinueve, que hacen un total de $10 + 10 = 20$.
Al escribir números de hasta tres cifras, cada grupo de cien se repiten los mismos dígitos que de cero a noventinueve, más los 2 iniciales de los números doscientos al doscientos noventinueve, dando un total de $10 \times 20 + 100 = 300$.
Al escribir números de hasta cuatro cifras, entonces, aparecerán $10 \times 300 + 1000 = 4000$.
Al escribir números de hasta cinco cifras, aparecerán $10 \times 4000 + 10000 = 50000$. Con esto cubrimos los números hasta el 99 999.
Nos faltaría computar lo que ocurre del 100 000 al 102 000. Todos estos números deben ser tener fijas las últimas dos cifras

1	0	F	F	F	F

que vendrían a ser como un prefijo que no aporta ningún dígito 2. El cómputo en esta última parte, entonces, es equivalente a lo que ocurre al escribir los números del cero al dos mil. De cero a mil había 300 dígitos 2. De mil a dos mil hay 300 también más el adicional que aporta el dos mil.
De esta forma en total hay $50000 + 2 \times 300 + 1 = 50\,601$.

Solución 4

$$\begin{aligned} N &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{2009 \text{ nueves}} \\ &= (9+1) + (99+1) + (999+1) + \cdots + \left(\underbrace{99\ldots9}_{2009 \text{ nueves}} + 1\right) - \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{2009 \text{ unos}}\right) \end{aligned}$$

donde se sumo 1 a cada sumando y como hay 2009 de ello se resto 2009 unos para que la cuenta no se altere.

$$\begin{aligned} N &= 10 + 100 + 1000 + \cdots + 1\underbrace{00\ldots0}_{2009 \text{ ceros}} - 2009 \\ N &= \underbrace{11\ldots1}_{2009 \text{ unos}}0 - 2009 = \\ N &= \underbrace{11\ldots1}_{2005 \text{ unos}}09101 \end{aligned}$$

de lo anterior es fácil ver que el número de unos en N es igual a 2007.

Solución 5
Si representamos por n el dígito prohibido, la relación anterior puede verse como

$$n \cdot 1000 + n \cdot 100 + 33 = (n \cdot 10 + n)^2 + 33^2$$

que simplificando da la ecuación cuadrática

$$100n + 3 = 11n^2 + 99$$

$$11n^2 - 100n + 96 = 0$$

que da dos soluciones, de las que nos quedamos con el valor 8, y así tenemos que la igualdad numérica especial que no pudo resistir Joaquín era:

$$8833 = 88^2 + 33^2$$

Solución 6

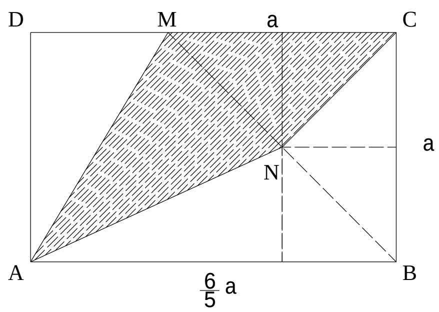
Sea $\overline{BC} = a$; como $5\overline{AB} = 6\overline{BC}$ entonces $\overline{AB} = \frac{6}{5}a$, por otro lado:

$$\text{Área } \triangle MNC = \frac{1}{2}\text{Área } \triangle MBC = \frac{1}{4}a^2 = \text{Área } \triangle BNC$$

$$\text{Área } \triangle ANB = \frac{1}{2}\frac{6}{5}a\frac{1}{2}a = \frac{3}{10}a^2$$

$$\text{Área } \triangle ADM = \frac{1}{2}a\left(\frac{6}{5}a - a\right) = \frac{1}{10}a^2$$

$$\begin{aligned} \text{Área} AMCN &= \frac{6}{5}a^2 - (\text{Área } \triangle ADM + \text{Área } \triangle ANB + \text{Área } \triangle BNC) \\ &= \frac{6}{5}a^2 - \left(\frac{1}{10}a^2 + \frac{3}{10}a^2 + \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{11}{20}a^2 \end{aligned}$$



luego la proporción pedidad es:

$$\frac{\text{Área} AMCN}{\text{Área} ABCD} = \frac{\frac{11}{20}a^2}{\frac{6}{5}a^2} = \frac{11}{24}$$

Solución 7

$$\begin{aligned} N &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{2009 \text{ nueves}} \\ &= (9+1) + (99+1) + (999+1) + \cdots + \left(\underbrace{99\cdots9}_{2009 \text{ nueves}} + 1\right) - \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{2009 \text{ unos}}\right) \end{aligned}$$

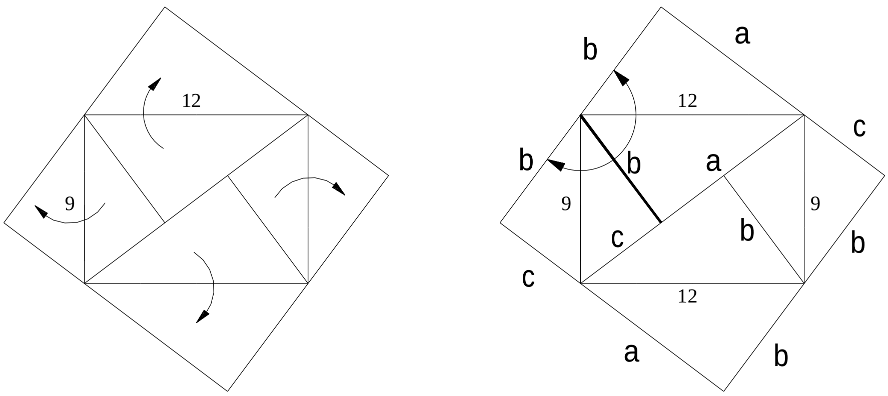
donde se sumo 1 a cada sumando y como hay 2009 de ello se resto 2009 unos para que la cuenta no se altere.

$$\begin{aligned}
N &= 10 + 100 + 1000 + \cdots + 1\underbrace{000\ldots0}_{2009\text{ ceros}} - 2009\\
N &= \underbrace{111\ldots1}_{2009\text{ unos}}0 - 2009 =\\
N &= \underbrace{111\ldots1}_{2005\text{ unos}}09101
\end{aligned}$$

de lo anterior es fácil ver que el número de unos en N es igual a 2007

Solución 8

Desdoblando tenemos:



y entonces planteamos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12^2\\ b^2 + c^2 = 9^2\\ (a + c)^2 = 9^2 + 12^2 \end{cases}$$

restando las primeras ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 63\\ (a + c)^2 = 225 = 15^2 \end{cases}$$

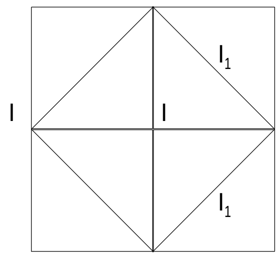
como $(a + c)^2 - 15^2 = 0$; factorizando $(a + c - 15)(a + c + 15) = 0$ y así se tiene $a+c-15 = 0$ (descartamos $a + c + 15 = 0$ pues a y c son positivos) tenemos el sistema

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 63\\ a + c - 15 = 0 \end{cases}$$

resolviendo tenemos $a = \frac{48}{5}; c = \frac{27}{5}$ y se obtiene $b = \frac{36}{5}$; y así las dimensiones buscadas son: $2b$ y $a + c$; es decir $\frac{72}{5}$ y 15.

Solución 9

Sea l_1 el lado del cuadrado luego de una etapa y sea l el lado del cuadrado original, entonces



$$l^2 = 2l_1^2$$

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l$$

entonces tenemos:

1ra. etapa: el lado del cuadrado es $l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} l$

2da. etapa: el lado del cuadrado es $l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} l_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 l$

3ra. etapa: el lado del cuadrado es $l_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} l_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 l$

4ta. etapa: el lado del cuadrado es $l_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} l_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 l$

$\vdots \qquad \vdots$

$n-$esima. etapa: el lado del cuadrado es $l_n = \frac{1}{\sqrt{2}} l_{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n l$

donde $l = 2^{10}$ entonces

$$l_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n 2^{10} = 2^{10-\frac{n}{2}}$$

en esta $n-$esima. etapa la diagonal de este cuadradito debe ser menos que el diámetro de la circunferencia es decir 1, entonces se tiene:

$$2^{10-\frac{n}{2}} < 1$$
$$2^{10-\frac{n}{2}} < 2^0$$
$$10 - \frac{n}{2} < 0$$
$$n > 22$$

y así deben haber al menos 23 etapas para hacer que los cuadraditos resultantes puedan caber en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ cm.

Solución 10

Recordemos que la suma de los primeros n números naturales vale $\frac{n}{2}(n+1)$. Escribamos ahora

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+2n &= 2(1+2+\cdots+n) = n(n+1) \\ 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= (2-1)+(4-1)+(6-1)+\cdots+(2n-1) \\ &= 2+4+6+\cdots+2n-n = n^2 \end{aligned}$$

De este modo, se tiene

$$\frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{2009}{2010}$$

que da

$$n = 2009$$

Solución 11

Supongamos que los números son

$$a_i = \frac{1}{2} + i; \; a_j = \frac{1}{2} + j; \; a_k = \frac{1}{2} + k$$

y que la razón de la progresión geométrica vale r. De este modo, para ciertos enteros s y t se tiene la conexión $a_j = r^s a_i$ y $a_k = r^t a_j$, que se puede escribir, utilizando el cambio $A_i = 2a_i$, $A_j = 2a_j$, $A_k = 2a_k$, como

$$\begin{aligned} A_j &= r^s A_i \\ A_k &= r^t A_j \end{aligned}$$

donde A_i, A_j, A_k deben cumplir el requisito de ser enteros positivos impares. Para esto se debe escoger como razón un número entero impar, siendo el más simple 3. Además, si planteamos los términos iniciales de la progresión, se tendría $s = 1$, $t = 1$, que da

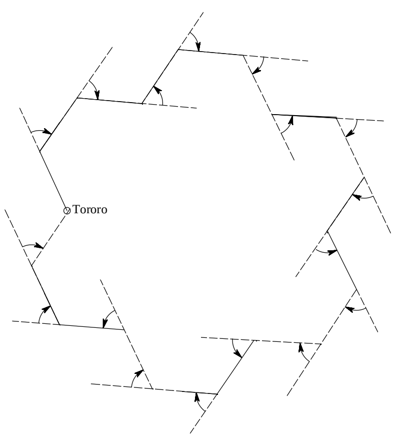
$$\begin{aligned} A_j &= 3^1 A_i \\ A_k &= 3^1 A_j \end{aligned}$$

Ahora si ...jamos $A_i = 1$, obtenemos $A_j = 3$ y $A_k = 9$. Entonces, *una posible terna de números en progresión geométrica* es

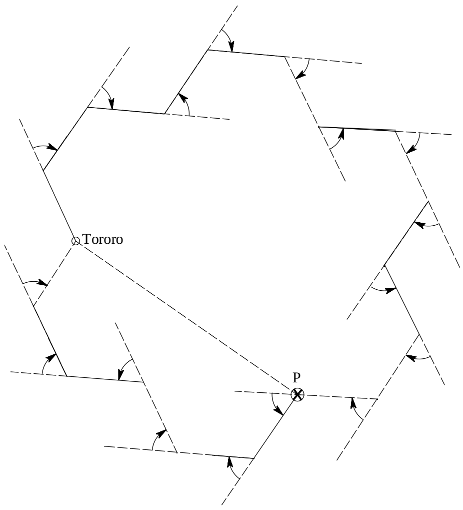
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \\ a_1 &= \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 \\ a_4 &= \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + 4 \end{aligned}$$

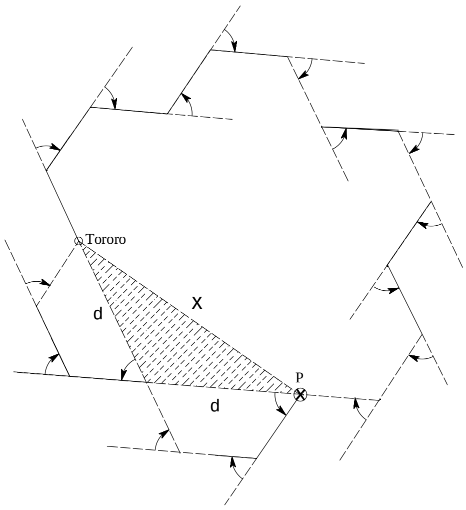
Solución 12

Completando las etapas tenemos:

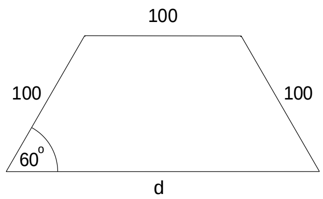


luego para 1930 etapas, tendremos dividiendo entre 6 que son el número de etapas que cierran la figura: $1930 = 6 \times 321 + 4$ lo que nos dice que el caminante estará a partir del punto de partida a cuatro etapas es decir en el punto P





de la figura se sigue:



$$d = 100 + 2 \times 100 \cos\left(60^{0}\right) = 200$$

entonces del teorema de los cosenos tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \times 200^2 - 2 \times 200^2 \cos\left(120^{0}\right) = 120000 \\ x &= 200\sqrt{3} \end{aligned}$$

Solución 13

Como el cuadrado tiene perímetro 48, entonces su lado mide 12

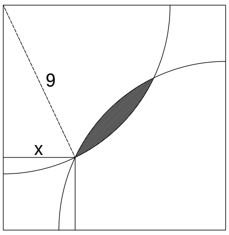


Figura 1

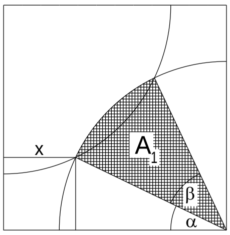


Figura 2

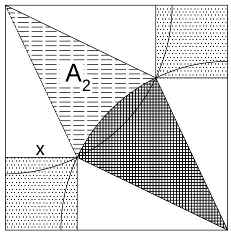


Figura 3

es claro que

$$9^2 = x^2 + (12 - x)^2$$

y se tienen $x_1 = \frac{12-3\sqrt{2}}{2}$ y $x_2 = \frac{12+3\sqrt{2}}{2}$, tomamos la solución $x_1 = \frac{12-3\sqrt{2}}{2}$ por la figura 1, por otro lado es claro tambien que

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{12-3\sqrt{2}}{2}}{12 - \frac{12-3\sqrt{2}}{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$$

y como

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}\right)$$

y así el área del sector (figura 2) es:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(9^2\right)\beta = \frac{81\beta}{2}$$

por otro lado de la figura 3

$$\begin{aligned} A_2 &= 12^2 - 2x^2 - 4\frac{1}{2}(12-x)\,x - A_1 \\ &= 144 - 24x - A_1 \end{aligned}$$

finalmente tenemos que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= 12^2 - 2x^2 - 4\frac{1}{2}(12-x)\,x - 2A_2 \\ &= 2A_1 + 24x - 144 \end{aligned}$$

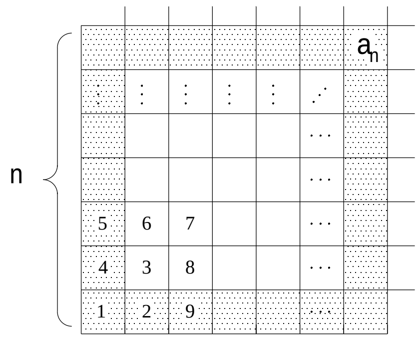
donde x y A_1 se han dado antes.

Solución 14

Observamos los números de la diagonal, es decir la sucesión: $1; 3; 7; 13; 21; 31; \ldots;$ para la cual se tiene la siguiente ley de formación:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 = 1\\
a_2 &= 3 = 2+1\\
a_3 &= 7 = 3+4 = 4+2+1\\
a_4 &= 13 = 7+6 = 6+4+2+1\\
a_5 &= 21 = 13+8 = 8+6+4+2+1\\
a_6 &= 31 = 21+10 = 10+8+6+4+2+1\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

de donde se sigue que cada elemento a_n es suma de números pares consecutivos en número igual el lado del cuadrado al cual pertenece este elemento.



Entonces para el n - esimo cuadrado se tiene:

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+2+4+\ldots+2(n-1) =\\
&= 1+2(1+2+3+\ldots+(n-1)) =\\
&= 1+2\left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right) = n^2-n+1
\end{aligned}$$

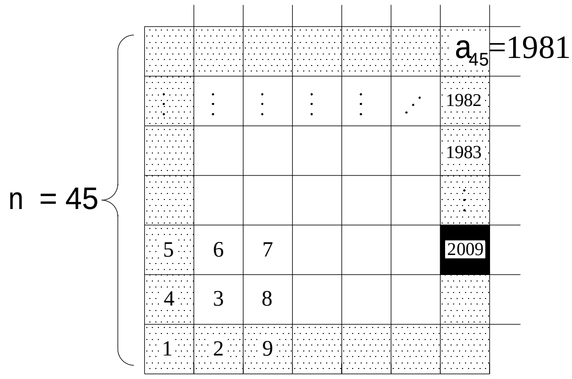
para saber en que cuadrado esta 2009, vamos a estimar n tal que $n^2 - n + 1$ este cerca de 2009, veamos alguna cuentas:

$$\begin{array}{ll}
n = 10 & n^2-n+1 = 91\\
n = 20 & n^2-n+1 = 381\\
n = 30 & n^2-n+1 = 871\\
n = 40 & n^2-n+1 = 1561\\
n = 50 & n^2-n+1 = 2451
\end{array}$$

como con $n = 50$ tenemos un elemento mayor que 2009, ensayamos con $n = 45$; $n^2 - n + 1 = 1981$ y si sumamos 28 tenemos 2009. Luego el número 2009 esta en el cuadrado de lado 45, ahora veremos su posición. Observemos

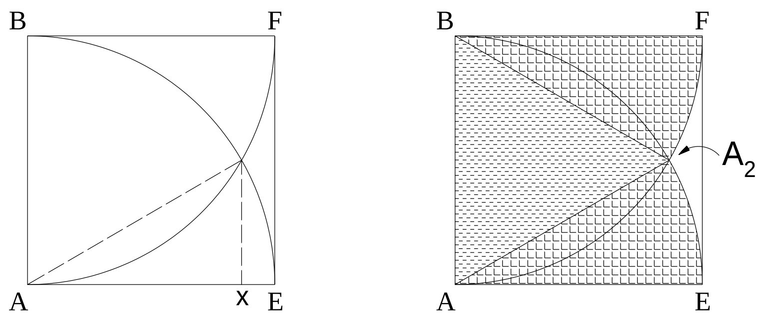
lado del cuadrado n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	45	$\cdots$
elemento de la diagonal a_n	1	3	7	13	21	31	43	57	73	$\cdots$	1981	$\cdots$

si observamos la primera figura 4, se sigue que para lados impares (los sombreados) como en el que se encuentra 2009, a partir de 1981 debemos sumar 28 cuadros hacia abajo y tenemos 2009, es decir



luego las coordenadas de 2009 son $(45; 45 - 28) = (45; 17)$.

Solución 15
Es claro que $2\overline{AB} = \overline{BC}$, luego $\overline{AB} = 16$:



es claro tambien que

$$\begin{aligned} 16^2 &= x^2 + 8^2 \\ x &= \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

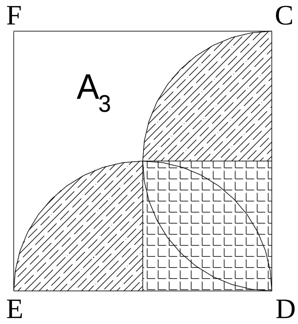
Por otro lado cada uno de los sectores tiene área igual a:

$$A_1 = \frac{1}{2}16^2\frac{\pi}{6} = \frac{64\pi}{3}$$

y como el triángulo equilátero tiene área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}16^2 = 64\sqrt{3}$; tenemos que el área A_2 es igual a:

$$A_2 = 16^2 - 64\sqrt{3} - 2\left(\frac{64\pi}{3}\right) = 256 - 64\sqrt{3} - \frac{128}{3}\pi$$

Para la otra parte tenemos:

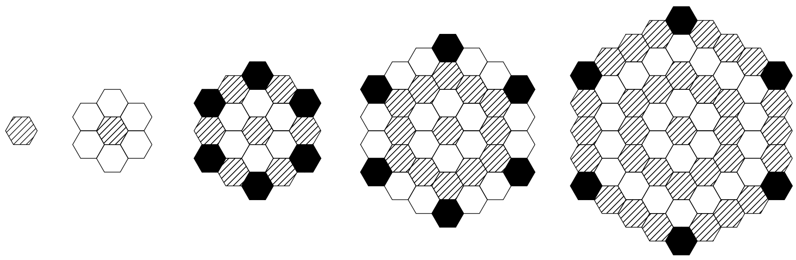


$$A_3 = 16^2 - 8^2 - \frac{1}{2}\pi 8^2 = 192 - 32\pi$$

finalmente el área pedida es

$$\begin{aligned} A &= A_2 + A_3 = 256 - 64\sqrt{3} - \frac{128}{3}\pi + 192 - 32\pi \\ &= 448 - 64\sqrt{3} - \frac{224}{3}\pi \end{aligned}$$

Solución 16



Es fácil observar de acuerdo a la figura anterior que en la figura con 2009 capas se tendrán 2009 hexágonos en cada lado de la figura que se obtenga (la cual se parece a una gran hexágono), tambine es claro que cada hexágono en cada capa aporta con dos aristas con excepción de los hexágonos en la esquinas (los pintados con negro) los que aportan tres de sus aristas, así que en la capa 2009 en total hay:

$$(2009 - 2) \times 6 \times 2 + 6 \times 3 = 24102$$

Luego en el borde de la capa 2009 hay 24102 aristas.

Solución 17

Tenemos tres casos:
Caso 1: números de dos dígitos, hay un número el 11
Caso2: números de tres dígitos, hay dos posibilidades

11a	$a \in \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	luego hay 9 números
a11	$a \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$	luego hay 8 números

Caso3: números de cuatro dígitos, hay tres posibilidades

11ab	$a \in \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	$b \in \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	luego hay 9×9 números
a11b	$a \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$	$b \in \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	luego hay 8×9 números
ab11	$a \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$	$b \in \{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	luego hay 8×9 números

En total hay $1 + 9 + 8 + 81 + 72 + 72 = 243$

Solución 18

Los múltiplos comunes a 7 y 8 son de la forma: $7 \times 8 \times n$; y el número de estos es igual a n; el número de múltiplos de 7 menores que 56n es igual a 8n y el número de multiplos de 8 menores que 56n es igual a 7n; de manera que el número de multiplos de 7 y 8 incluyendo una vez los comunes es igual a

$$7n + 8n - n = 14n$$

sea

$$14n = 2009$$

$$\begin{array}{r|l} 2009 & 14 \\ \hline (7) & 143 \end{array}$$

con $n = 143$ y tenemos

múltiplos de $7 \cdot 8$	56,112,...,8008	hay 143 números
múltiplos de 7	7,14,...,8008	hay 1144 números
múltiplos de 8	8,16,...,8008	hay 1001 números

y en total hay $1144 + 1001 - 143 = 2002$ y la situación es como sigue:

$$7,8,...,8008,\underline{8015},8016,\underline{8022},8024,\underline{8029},8032,\underline{8036},..$$

lugar 2002 lugar 2009

donde los números subrrayados son múltiplos de 7. El número de ligra 2009 es 8036.

Solución 19

Designemos por x el número de ratones, y el número de serpientes y z el número de alacranes, la situación es como sigue:
Dia 1:

número de ratones	$x - y$
número de serpientes	$y - z$
número de alacranes	$z - (x - y) = -x + y + z$

Dia 2:

número de ratones $x - y - (y - z) = x - 2y + z$
número de serpientes $y - z - (-x + y + z) = x - 2z$
número de alacranes $-x + y + z - (x - 2y + z) = -2x + 3y$

Dia 3:

número de ratones $x - 2y + z - (x - 2z) = -2y + 3z$
número de serpientes $x - 2z - (-2x + 3y) = 3x - 3y - 2z$
número de alacranes $-2x + 3y - (-2y + 3z) = -2x + 5y - 3z$

Dia 4:

número de ratones $-2y + 3z - (3x - 3y - 2z) = -3x + y + 5z$
número de serpientes $3x - 3y - 2z - (-2x + 5y - 3z) = 5x - 8y + z$
número de alacranes $-2x + 5y - 3z - (-3x + y + 5z) = x + 4y - 8z$

Dia 5:

número de ratones $-3x + y + 5z - (5x - 8y + z) = -8x + 9y + 4z$
número de serpientes $5x - 8y + z - (x + 4y - 8z) = 4x - 12y + 9z$
número de alacranes $x + 4y - 8z - (-8x + 9y + 4z) = 9x - 5y - 12z$

y tenemos

$$\begin{cases} -8x + 9y + 4z = 1 \\ 4x - 12y + 9z = 0 \\ 9x - 5y - 12z = 0 \end{cases}$$

resolviendo tenemos $x = 189; y = 129; z = 88$; luego al principio habian 189 ratones.

Otra Solución por *Benny Nogales Flores, colegio CENDI*

5to. día en la noche hay 1 ratón, entonces había 1 alacran y había 1 serpiente, si había una serpiente había 2 ratones, entonces

al principio del día 5to $\rightarrow$ 1 serpiente, 1 alacran y 2 ratones

4to. día en la noche hay 2 ratones entonces habia 3 alacranes y había 4 serpientes, entonces había 6 ratones, entonces

al principio del día 4to $\rightarrow$ 4 serpientes, 3 alacranes y 6 ratones

3er. día en la noche hay 6 ratones entonces había 9 alacranes y había 13 serpientes, entonces había 19 ratones, entonces

al principio del día 3ro $\rightarrow$ 13 serpientes, 9 alacranes y 19 ratones

2do. día en la noche hay 19 ratones entonces había 28 alacranes y había 41 serpientes, entonces había 60 ratones, entonces

al principio del día 2do. $\rightarrow$ 41 serpientes, 28 alacranes y 60 ratones

1er. día en la noche hay 60 ratones entonces había 88 alacranes y había 129 serpientes, entonces había 189 ratones, entonces

al principio del día 1ro. $\rightarrow$ 129 serpientes, 88 alacranes y 189 ratones

Respuesta: al inicio habían 189 ratones.

Solución 20

Como el número es divisible por 12, debe ser divisible por 3 y 4.
Caso1: si el número a de ser divisible por 3, entonces la suma de sus dígitos debe ser multiplo de 3 de donde se tiene:

$$12 + x + y = 3a; \qquad a\ 2\ Z$$

y como 12 es multiplo de 3 en realidad tenemos:

$$x + y = 3a; \qquad a\ 2\ Z \qquad (*)$$

Caso2: si el número a de ser divisible por 4, entonces el número formado por las dos últimas cifra del número dado debe ser múltiplos de 4, decir:

$$\overline{1y} = 4b; \qquad b\ 2\ Z$$

lo cual tambien se escribe

$$10 + y = 4b; \qquad b\ 2\ Z$$

como y es dígito es fácil observar que

$$10 + 2 \text{ es múltiplo de } 4$$
$$10 + 6 \text{ es múltiplo de } 4$$

de donde se sigue que $y = 2$ ó $y = 6$.
Sea $y = 2$ reemplazando en la relación (*) tenemos:

$$x + 2 = 3a; \qquad a\ 2\ Z$$

y como x es dígito es fácil ver:

$$1 + 2 \text{ es múltiplo de } 3$$
$$4 + 2 \text{ es múltiplo de } 3$$
$$7 + 2 \text{ es múltiplo de } 3$$

Del mismo modo si $y = 6$ reemplazando en la relación (*) tenemos:

$$x + 6 = 3a; \qquad a\ 2\ Z$$

y como x es dígito es fácil ver:

$$0 + 6 \text{ es múltiplo de } 3$$
$$3 + 6 \text{ es múltiplo de } 3$$
$$6 + 6 \text{ es múltiplo de } 3$$
$$9 + 6 \text{ es múltiplo de } 3$$

Resumiendo se tienen las siguientes posibilidades y entonces los siguientes números:

x	y	65x1y
1	2	65112
4	2	65412
7	2	65712
0	6	65016
3	6	65316
6	6	65616
9	6	65916

Solución 21

Al realizar los dobleces el papel de un lado no se superpone al del otro, sino que empalman a la perfección debido a que los ángulos son complementarios. Lo que se obtiene es un nuevo cuadrado de lado 10, de manera que el área es 100.

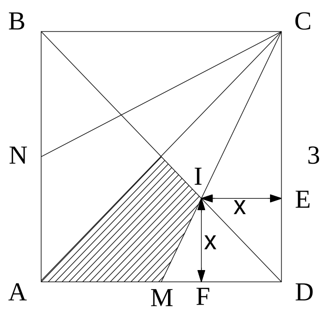
Solución 22 En el primer momento, el número de músicos tiene que ser de la forma n^2 para cierto n entero. En un segundo momento, el número de músicos debe ser de la forma $m(m+5)$ para cierto entero m. La conexión

$$n^2 = m(m+5)$$

implica que el factor n de la izquierda tiene que ser más grande que m pero más pequeño que $m+5$. De modo que hay sólo cuatro opciones para n, a saber $m+1$, $m+2$, $m+3$ y $m+4$. Sólo la tercera opción da una solución entera $m = 4$. La cantidad de músicos es $36 = 6^2 = 4 \times 9$.

Solución 23

Consideremos la midad del área buscada y supongamos que la diagonal BD cuando corta a MC lo hace a x de los lados, ver figura



entonces se tiene la siguiente igualdad de áreas

$$\text{Área}(CMD) = \text{Área}(CIE) + \text{Área}(IFDE) + \text{Área}(IMF)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(3) = \frac{1}{2}x(3-x) + x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - x\right)x$$

simplificando

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} &= \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}x^2 + x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

de donde se sigue que el área sombreada en la figura anterior es igual a

$$\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(1) = \frac{3}{2}$$

y así el área buscada es

$$A = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

Solución 24

Vamos a hallar una ley de formación para los números de la primera fila, los cuales estan sombreados:

1	2	6	7	15	16	28	29	

se observa que:

$$\begin{array}{l} t_1 = 1 = 1 \\ t_2 = 6 = 1 + 5 \\ t_3 = 15 = 6 + 9 \\ t_4 = 28 = 15 + 13 \\ \vdots \end{array} \quad \text{pero} \quad \begin{array}{l} 5 = 1 + 4 \\ 9 = 5 + 4 \\ 13 = 9 + 4 \\ \vdots \end{array} \quad \text{de donde se tiene:} \quad \begin{array}{l} t_1 = 1 = 1 \\ t_2 = 6 = 1 + 5 \\ t_3 = 15 = 1 + 5 + 9 \\ t_4 = 28 = 1 + 5 + 9 + 13 \\ \vdots \\ t_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + [5 + 4(n - 2)] \end{array}$$

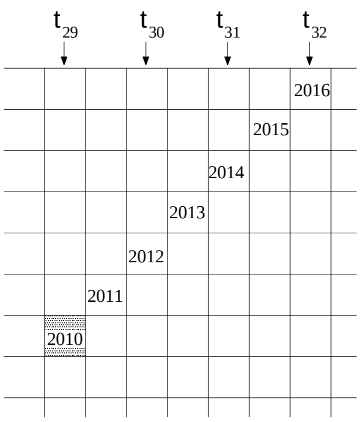
observemos que el término $n-$ésimo es suma de una progresión aritmética de diferencia común 4 y con n términos y tenemos:

$$t_n = \frac{n}{2}[1 + 5 + 4(n - 2)] = n(2n - 1)$$

Ahora vamos a estimar un n tal que t_n este cerca de 2010, por tanteos tenemos:

$$\begin{aligned} t_{30} &= 1770 \\ t_{31} &= 1891 \\ t_{32} &= 2016 \end{aligned}$$

tenemos la situación



de donde es fácil que 2010 esta debajo de $t_{29} = 1653$:

Solución 25

Escribamos $n = \overline{ab} = 10a + b$. Entonces tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + (a + b) &= 10a + b \\ ab &= 9a \end{aligned}$$

De donde $b = 9$, y a puede ser cualquier dígito entre 1 y 9. Los números pedidos son

$$n = 19;\ 29;\ 39;\ 49;\ 59;\ 69;\ 79;\ 89;\ 99$$

Solución 26

Para cada planeta hagamos dos anotaciones: $a_k = [O_k; d_k]$ donde O_k es el planeta al que observa el astrónomo del planeta k y d_k es la distancia que separa el planeta k de ese planeta observado. Por ejemplo, si para el planeta 3 la anotación es $[8; 10^5]$, esto significa que la distancia entre el planeta 3 y el planeta 8 es 10^5, y que el astrónomo del planeta 3 observa el planeta 8.
Ahora, entre todas estas anotaciones tiene que haber una distancia D que sea la mayor, y supongamos que esa anotación corresponde al último planeta, cuyo astrónomo observa al penúltimo planeta. Es decir, $a_{11} = [10; D]$, con D la mayor de todas las distancias anotadas.
Si el planeta 10 tiene la anotación $a_{10} = [O_k; d]$ con d menor que D, esto implica que el astrónomo 10 no observa el planeta 11 sino otro planeta más cercano, pero implica, además, que nadie más observa al planeta 11 (ya que las distancias son diferentes dos a dos). Si este fuera el caso, estaría probado que hay un planeta que nadie observa.
Si, por el contrario, la anotación correspondiente al planeta 10 tuviese registrada una distancia igual a D, sería $a_{10} = [11; D]$, o sea, el astrónomo 10 observaría al planeta 11. Nadie más podría observar al planeta 11, ya que, otra vez, las distancias son todas diferentes. En resumen, en esta situación, los astrónomos de estos dos planetas estarían obsevándose mutuamente, sin interferir en las observaciones de los planetas restantes. En consecuencia, podemos aislarlos y continuar analizando lo que ocurre con los restantes nueve planetas.
Siguiendo este análisis, o algún planeta queda sin observar, o los vamos aislando de dos en dos sin que interfieran en el resto de las observaciones. Pero, al final debería, de todas maneras, quedar uno sin ser observado pues hay once planetas, una cantidad impar.

Solución 27

Por ser progresión aritmética se tiene:

$$2x + y - (x + 2y) = x + 2y - x$$

simplificando

$$x = 3y \tag{4.1}$$

Por ser progresión geométrica se tiene

$$\frac{(x+1)^2}{xy + 25} = \frac{xy + 25}{(y+1)^2}$$

simplificando

$$(x+1)^2(y+1)^2 - (xy+25)^2 = 0$$

reemplazamos en esta ecuación, la ecuación (1) y tenemos:

$$(3y+1)^2(y+1)^2 - \left(3y^2+25\right)^2 = 0$$

de donde factorizando obtenemos

$$\left[(3y+1)(y+1) - \left(3y^2+25\right)\right]\left[(3y+1)(y+1) + \left(3y^2+25\right)\right] = 0$$

es decir

$$(4y - 24)\left(6y^2+4y+26\right) = 0$$

y tenemos

$$\begin{aligned} 4y - 24 &= 0 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

de la otra ecuación

$$6y^2+4y+26 = 0$$

no se obtienen soluciones reales y la descartamos, finalmente reemplazando $y = 6$ en la (1) tenemos $x = 18$:

Solución 28

Hay 32 números del tipo pedido.

Distingamos cuatro casos:

i. cuando el número tiene una o dos cifras;

ii. cuando el número tiene tres cifras;

iii. cuando el número tiene cuatro cifras y comienza por 1;

iv. cuando el número tiene cuatro cifras y comienza por 2;

Los casos i. y iv. son sencillos, y dan: 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.

En el caso ii. queremos números $\overline{xyz}$ tales que $x + y + z = 7$. Entonces hay que descomponer 7 como suma de enteros positivos diferentes:

$$\begin{gathered} 0+1+6 \\ 0+2+5 \\ 0+3+4 \\ 1+2+4 \end{gathered}$$

Lo que da las opciones: 106, 160, 601, 610, 205, 250, 502, 520, 304, 340, 403, 430, 124, 142, 214, 241, 412, 421.

Finalmente, en el caso iii. queremos números $\overline{1xyz}$ tales que $x + y + z = 6$. La únida descomposiciones de 6, sin la cifra 1, es:

$$0+2+4$$

que da las opciones: 1024, 1042, 1402,1204,1240,1420. El caso iv. no existe, luego hay 32 números buscados.

Solución 29

La suma es la de una progresión geométrica y tenemos

$$N = \frac{1 - 7 \times 7^{2009}}{-6} = \frac{1}{6}\left(7^{2010} - 1\right)$$

Por otro lado estudiemos las potencia pares de 7:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 49 \\ 7^4 &= 2401 \\ 7^6 &= 117649 \\ 7^8 &= 5764801 \\ 7^{10} &= 282475249 \\ 7^{12} &= 13841287201 \\ &\vdots \end{aligned}$$

de donde se sigue que 7^{par} termina en 9 ó 1. Los que terminan en 9 corresponden a las potencia 2,6,10,14,..., vamos a ver si 2010 está en esta lista. El término $n-$ésimo de la lista anterior es $2 + 4(n - 1)$ es decir $4n - 2$; si 2010 está en esta lista existe un n tal que $4n - 2 = 2010$ resolviendo se tiene $n = 503$ lo que justifica que entonces 2010 está en esa lista y así

$$7^{2010} \text{ termina en } 9$$

es más

$$7^{2010} \text{ termina en } 49$$

vea la lista anterior, luego

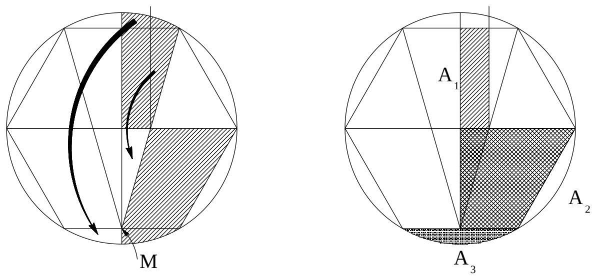
$$7^{2010} - 1 \text{ termina en } 48$$

y asi

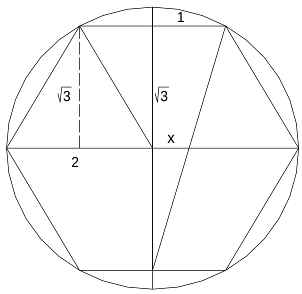
$$\frac{1}{6}\left(7^{2010} - 1\right) \text{ termina en } 8$$

Solución 30

Consideremos la mitad del área sombreada y también los movimientos indicados en la siguiente figura



de donde se sigue que la mitad del área buscada es igual a $A_1 + A_2 + A_3$: Para hallar el área A_1 tenemos



de donde se tiene la proporción

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

y entonces

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$$

Por otro lado

$$A_2 = \frac{1}{4}(\text{área del hexagono}) = \frac{1}{4}\left(6 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{6}(\text{área de la circunferencia - área del hexagono}) \\ &= \frac{1}{6}\left(4\pi - 6\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

de donde el área buscada es

$$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Solución 31

Sea n un entero positivo tal que

$$\frac{x+99}{x+19} = n$$

resolviendo x tenemos

$$x = \frac{99 - 19n}{n-1}; \qquad n \neq 1$$

es claro que $n = 1$ es imposible, simplificando

$$x = \frac{80 + 19 - 19n}{n-1} = \frac{80}{n-1} - 19$$

como x es entero tenemos que

$$\frac{80}{n-1} \text{ es entero}$$

$$\frac{2^4 \cdot 5}{n-1} \text{ es entero}$$

luego $n-1$ es divisor de $2^4 \cdot 5$ y entonces exiten las siguientes posibilidades:

$n-1=2^0$	$n=2$	$x=61$
$n-1=2^1$	$n=3$	$x=21$
$n-1=2^2$	$n=5$	$x=1$
$n-1=2^4$	$n=9$	$x=-9$
$n-1=5$	$n=6$	$x=-3$
$n-1=2\cdot 5$	$n=11$	$x=-11$
$n-1=2^2\cdot 5$	$n=21$	$x=-15$
$n-1=2^3\cdot 5$	$n=41$	$x=-17$
$n-1=2^4\cdot 5$	$n=81$	$x=-18$

como x es entero positivo se tiene que $x=61; x=21$ y $x=1:$

Solución 32

$$30a0b03 = 3 \times 10^6 + a \times 10^4 + b \times 10^2 + 3$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 13 \times 7 + 9 \\ 10^4 &= 13 \times 769 + 3 \\ 10^6 &= 13 \times 76923 + 1 \end{aligned}$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} 30a0b03 &= 3 \times 10^6 + a \times 10^4 + b \times 10^2 + 3 \\ &= 3(13 \times 76923 + 1) + a(13 \times 769 + 3) + b(13 \times 7 + 9) + 3 \\ &= 13h + (3 + 3a + 9b + 3) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $30a0b03$ será divisible por 13 si y solo si $3+3a+9b+3$ es divisible por 13 y como

$$3 + 3a + 9b + 3 = 3(a + 3b + 2)$$

entonces se tiene

$$a + 3b + 2 = 13n$$

y como a y b son dígitos se tiene:

b	$3b+2$	a
0	2	no existe
1	5	8
2	8	5
3	11	2
4	14	no existe
5	17	9
6	20	6
7	23	3
8	26	0
9	29	no existe

luego los posibles valores para $(a;b)$ son: $(8;1)$; $(5;2)$; $(2;3)$; $(9;5)$; $(6;6)$; $(3;7)$; $(0;8)$:

Solución 33

Sea b_n el número de dígitos de a_n; entonces:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 4\\
b_2 &= 3\times 4+4=16\\
b_3 &= 15\times 4+16=76\\
b_4 &= 75\times 4+76=376\\
b_5 &= 375\times 4+376=1876\\
&\vdots
\end{aligned}$$

sin embargo escribiendo de otra forma tenemos

$$\begin{aligned}
b_1 &= 4\\
b_2 &= (4-1)\times 4+4=(b_1-1)\times 4+b_1=5b_1-4\\
b_3 &= (16-1)\times 4+16=(b_2-1)\times 4+b_2=5b_2-4\\
b_4 &= (76-1)\times 4+76=(b_3-1)\times 4+b_3=5b_3-4\\
b_5 &= (376-1)\times 4-376=(b_4-1)\times 4-b_4=5b_4-4\\
&\vdots
\end{aligned}$$

finalmente reemplazando tenemos:

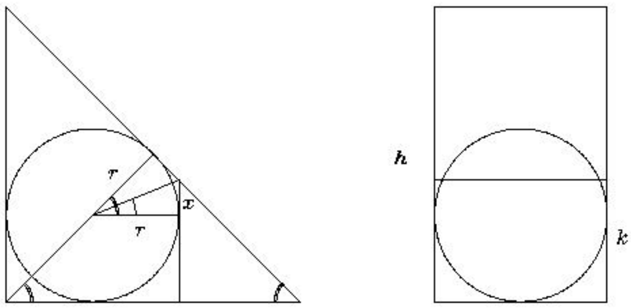
$$\begin{aligned}
b_1 &= 4\\
b_2 &= 5b_1-4\\
b_3 &= 5b_2-4=5(5b_1-4)-4=5^2b_1-24\\
b_4 &= 5b_3-4=5\left(5^2b_1-24\right)-4=5^3b_1-124\\
b_5 &= 5b_4-4=5\left(5^3b_1-124\right)-4=5^4b_1-624\\
&\vdots
\end{aligned}$$

de donde se sigue:

$$a_n = 5^{n-1} \times 4 - \left(5^{n-1} - 1\right) = 3 \times 5^{n-1} + 1.$$

Solución 34

Del gráfico se tienen las siguentes relaciones:



$$\tan\left(\frac{45}{2}\right) = \frac{x}{r}$$

de donde

$$x = r\tan\left(\frac{45}{2}\right) = r\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

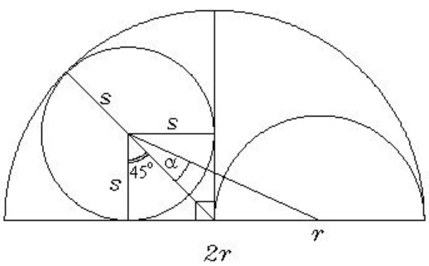
donde se uso la fórmula

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)}$$

con $\theta = \frac{45}{2}$. y se sigue rápidamente $\tan(45/2) = \sqrt{2} - 1$. Por otro lado sea la altura del cilindro $h = 2r + r + x = 3r + \left(\sqrt{2} - 1\right) r = \left(\sqrt{2} + 2\right) r$ y sea la k la altura del cilindro pequeño (ver figura) entonces $k = r + x = \sqrt{2}r$; entonces el volumen buscado será:

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{2}\pi r^2 (h - k) = \left(\sqrt{2} + 1\right)\pi r^3.$$

Solución 35



Del gráfico, hallamos el radio s de la circunferencia pequeña:

$$(r - s)^2 = s^2 + s^2$$

resolviendo se tiene $s = -r\left(\sqrt{2}+1\right)$; $s = r\left(\sqrt{2}-1\right)$ de donde tomamos $s = r\left(\sqrt{2}-1\right)$. Por otro lado tenemos:

$$\tan(45 + \alpha) = \frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \frac{\frac{r}{2} + s}{s} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 2}$$

de donde:

$$\frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 2}$$

resolviendo tenemos

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{4\sqrt{2} - 3}$$

y así

$$\cot(\alpha) = 4\sqrt{2} - 3$$

Solución 36

Ubiquemos el primer número del año. Como la suma de los 2008 números consecutivos tiene que ser positiva, dejamos la mitad como negativos junto al cero: $-1003, -1002, \ldots, -1, 0$ y la otra mitad como positivos $1, 2, \ldots, 1003, 1004$. Entonces el segundo número del año estará dado por la secuencia:

$$-1002, 1001, \ldots, 1005$$

Solución 37

Escribimos $A = dA'$ y $B = dB'$ donde $d = \text{mcd}(A, B)$ y $A' < B'$; eliminando los denominadores tenemos

$$30(A + B) = AB$$

$$30(A' + B') = dA'B' \qquad (*)$$

como $\text{mcd}(A', A' + B') = \text{mcd}(B', A' + B') = 1$ tenemos que $(A' + B')$ divide a d; escribimos $d = k(A' + B')$ para alguna k; simplificando la ecuación (*) tenemos

$$30 = kA'B'$$

las posible soluciones se dan en la tabla

k	A'	B'
1	1	30
	2	15
	3	10
	5	6
2	1	15
	3	5
3	1	10
	2	5
5	1	6
	2	3
6	1	5
10	1	3
15	1	2

Estas opciones, para $A = k(A' + B')A'$ y $B = k(A' + B')B'$ dan las parejas

A	31	34	39	55	32	48	33	42	35	50	36	40	45
B	930	255	130	66	480	80	330	105	210	75	180	120	90

Solución 38

Notemos que la secuencia de cifras con la que terminan las potencias de 6 es siempre 6: Ahora las cifras con que terminan las potencias de 9 son 9 y 1 de forma consecutiva. Denotemos por $U(s)$ la última cifra del número s: Entonces la última cifra pedida será:

$$\begin{aligned} U(1 + 6 + 9 + 6^2 + 9^2 + \cdots + 6^{2008} + 9^{2009}) &= U(1 + 2008 \times 6 + 1004 \times 9 + 1004 \times 1) \\ &= U(1 + 8 + 6 + 4) = 9 \end{aligned}$$

Solución 39

Es fácil notar que el polígono de la posición 2008 es un hexágono regular que tiene arista formada por 2008 triángulos. Entonces su perímetro será:

$$6 \times 2008 = 12048$$

En cuanto al área, notemos que el hexagono regular de la posición 2008, esta formado por 6 triángulos equiláteros de lado 2008 (al igual que el hexágono regular de la posición 1, esta formado por 6 triángulos equiláteros de lado 1). Basándonos en el área de una triángulo equilátero, el área pedida del hexágono será

$$6\left(\frac{1}{2}\right)(2008)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}2008\right) = 6048096\sqrt{3}$$

Solución 40

No es posible cambiar todas las luces a verde, si inicialmente todas estaban en rojo. Al oprimir un botón de la esquina (botones 1,5,21,25) cambian de colos 4 botones. Al oprimir uno del borde que no esta en la esquina (botones 2,3,4,6,10,11,15,16,20,22,23,24) cambian de color 6 botones. Y al orpimir un boton del centro (botones 7,8,9,12,13,14,17,18,19) cambian 8 botones. Cada vez cambia de color una cantidad par de botones y si los 25 botones inicialmente estaban rojos, nunca podrán estar al mismo tiempo todos de color verde

Solución 41

Supongamos que la secuencia $x_1; x_2; :::; x_{10}$ tiene suma

$$S = x_1^2 + x_2^2 + ::: + x_{10}^2$$

minimal. Adicionalmente supongamos que los números están ordenados de menor a mayor, es decir,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ::: \cdot x_{10}$$

Si la diferencia entre x_{10} y x_1 es mayor o igual a 2, entonces la secuencia $x_1 + 1; x_2; :::; x_{10}$ ¡ 1; producida al traspasar una unidad de x_{10} a x_1; tiene suma de cuadrados

$$T = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + ::: + x_9^2 + (x_{10} ¡ 1)^2$$

dado que la diferencia $S ¡ T = 2(x_{10} ¡ x_1 ¡ 1)$ es positiva, obtenemos que $S > T$; lo que da una contradicción al supuesto que S es minimal. En consecuencia $x_{10} ¡ x_1 = 0$ ó 1:
Por lo anterior esta sucesión tiene r sumandos iguales a x y $10 ¡ r$ sumandos iguales a $x + 1$; donde $0 \cdot r \cdot 10$: Como además debe cumplirse que

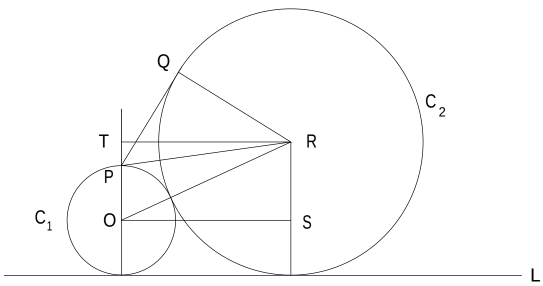
$$rx + (10 ¡ r)(x + 1) = 95$$

concluimos que $10x ¡ r = 85$: Esto implica que 5 divide a r; es decir

$$r = 0 \text{ ó } r = 5 \text{ ó } r = 10$$

pero se veri…caque los casos $r = 0$ ó $r = 10$ son imposibles mientras que $r = 5$ da la solución $x = 9$: En consecuencia la suma minimla es $S = 5 £ 9^2 + 5 £ 10^2 = 905$

Solución 42



Llamemos r_1 y r_2 a los radios de C_1 y C_2 respectivamente. Aplicando el teorema de Pitágoras a los $\triangle OSR$; $\triangle PTR$, $\triangle RQP$; tenemos

$$\overline{OS}^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2 \tag{4.2}$$

$$\overline{TR}^2 + (r_2 - 2r_1)^2 = \overline{PR}^2 \tag{4.3}$$

$$\overline{PQ}^2 + r_2^2 = \overline{PR}^2 \tag{4.4}$$

como $\overline{OS} = \overline{TR}$ y haciendo (1) $-$ (2) + (3) obtenemos

$$(r_2 - r_1)^2 - (r_2 - 2r_1)^2 + PQ^2 + r_2^2 = (r_2 + r_1)^2$$

lo que luego de las simplificaciones conduce a

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= 4r_1^2 \\ \overline{PQ} &= 2r_1 \end{aligned}$$

como se quería probar.

Solución 43

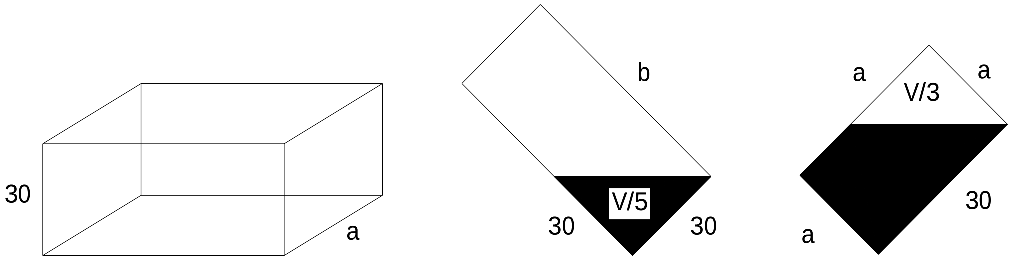
El número $\underbrace{22\cdots22}_{n\text{- veces}} = 2(\underbrace{11\cdots11}_{n\text{- veces}}) = \frac{2}{9}(\underbrace{99\cdots99}_{n\text{- veces}}) = \frac{2}{9}(10^n - 1)$

Utilizando este resultado tenemos que

$$\begin{aligned} 2 + 22 + 222 + \cdots + \underbrace{22\cdots22}_{n\text{- veces}} &= \frac{2}{9}\left[(10 - 1) + \left(10^2 - 1\right) + \cdots + \left(10^{2008} - 1\right)\right] \\ &= \frac{2}{9}\left[\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^{2008}\right) - 2008\right] \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{10^{2009} - 10}{9} - 2008\right) \\ &= \frac{2}{81}\left(10^{2009} - 18082\right) \end{aligned}$$

Solución 44

Sean a y b las dimensiones de los lados de la base del acuario. Ya que al girar 45º sobre cada una de las aristas (lados) se derrama $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$ del contenido respectivamente se puede concluir que uno de los lados es menor a 30 cm y el otro mayor a 30 cm, ver figura



rotación sobre el lado a   rotación sobre el lado b

Como en el primer giro se pierde un tercio del contenido tenemos que:

$$\frac{1}{2}a^2b = \frac{1}{3}30ab \Rightarrow a = 20$$

con el segundo giro se pierde $\frac{4}{5}$ del contenido entonces

$$\frac{1}{2}30^2a = \frac{1}{5}30ab \Rightarrow b = 75$$

por lo tanto el volumen es 45000.

Solución 45

Recordemos que $2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$: Esto es necesario porque en la sucesión tenemos 1 y 2 luego aumentamos 3 números 1,2 y 3, despues aumentamos 4 números 1,2,3 y 4 así sucesivamente, entonces buscamos un n y m tal que:

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} \leq 2008 \leq \frac{(m+2)(m-1)}{2}$$

donde $n = m + 1$; resolviendo esta desigualdad obtenemos: $n = 63$ y $m = 62$: Con $n = 63$ tenemos que el elemento número 2015 es el número 63. Como estamos interesados en el elemento 2008, le restamos 7 a 63 y obtenemos que el elemento 2008 es el número 56, que esta en el nivel 8.

Solución 46

Multiplicando como es usual tenemos

en esta última cuenta se tiene:

$$4\underbrace{000\ldots000}_{x-1}28\underbrace{000\ldots000}_{x-1}49$$

de donde sumando los dígitos tenemos

$$2(x-1)+5=2007$$

de donde se tiene $x = 1002$, es decir se deben tener 1002 ceros entre 2 y 7 tal que el número así formado al cuadrado tenga en total 2007 dígitos.

Solución 47

Consideremos las siguientes lineas en el hexagono dado

de esta se puede ver que los triángulos DCA, ABH, BFC y ABC son iguales y son equiláteros. Por otro lado los triángulos DEF, FGH y HID tiene cada uno igual área que los anteriores pues los ángulos $E\widehat{D}F$, $E\widehat{F}D$, $F\widehat{G}H$, $G\widehat{H}F$, $D\widehat{H}I$ y $I\widehat{D}H$ son iguales y miden 30^0 luego en total hay 7 triángulos de igual área a ABC y como el hexagono tiene área 49 se sigue que área del triángulo ABC es 7 m^2.

Solución 48

Sea $\overline{19xy}$ en año de nacimiento de Juan. Los años que cumple al 25 de agosto del 2001 es igual a

$$2001-19xy=101-10x-y$$

por la condición del problema

$$\begin{aligned} 101-10x-y &= 1+9+x+y \\ 11x+2y &= 91 \end{aligned}$$

En esta ecuación x debe ser impar y al ser cifra se tiene las opciones 1, 3, 5, 7, 9. El máximo valor que puede tomar y es 9, de modo que x no puede ser 1, 3, 5 ya que la suma no alcanzaría a 91, pero x tampoco puede ser 9 porque supera a 91, y sólo queda el valor 7 para x. Esta opción da $y = 7$. Entonces el año de nacimiento de Juan fue 1977.

Solución 49

Vamos a determinar la …la en la cae 2007, para ello solo consideraremos como …la las que terminan en 5, 13, 21, 29,..:

	2	3	4	5	!	…la 1
9	8	7	6			
	10	11	12	13	!	…la 2
17	16	15	14			
	18	19	20	21	!	…la 3
25	24	23	22			
	26	27	28	29	!	…la 4
			⋮			

Observemos

5 = 5
13 = 5 + 8
21 = 13 + 8 = 5 + 2 £ 8
29 = 21 + 8 = 5 + 3 £ 8
⋮

último número de la …la n es 5 + (n ¡ 1) 8

resolvamos

5 + (n ¡ 1)8 = 2007

lo que da

n = 251;25

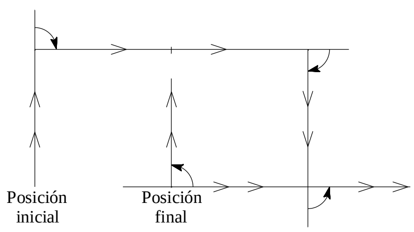
como n es un número natural ensayemos con n = 251 y tenemos que al …nal de la n ¡ ésima …la termina en 5 + (251 ¡ 1)8 = 2005 es decir se tiene:

	2002	2003	2004	2005	!	…la 251
2009	2008	2007	2006			

de donde se sigue que el número 2007 esta en la 3ra. columna.

Solución 50

Los cuatro movimientos que realiza el robot a la orden ”caminar” lo colocan un metro a la derecha y mirando en la misma dirección que la posición inicial, como en la …gura



Hay que descomponer 2007 en grupos de 4, tenemos $2007 = 501 \times 4 + 3$. Entonces recorre 501 metros a la derecha y los tres movimientos adicionales le desplazan 2 metros más a la derecha, esto da 503 metros a la derecha.

Solución 51

Sea el número de dos cifras $\overline{xy} = 10x + y$, la condición del problema da

$$\begin{aligned} 10x + y &= 3x \cdot y \\ 10x &= y(3x - 1) \end{aligned}$$

Entonces como y es dígito y divide a $2 \cdot 5 \cdot x$ puede ser 2, 5, o un múltiplo de 2 o un factor de x. Reescribiendo la ecuación de la forma

$$y = x(3y - 10)$$

queda descartada la última opción, y no puede ser factor de x, ni siquiera igual a x. Quedan los casos $y = 2; 4; 6; 8$ y 5 los cuales dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x &= 3x - 1 \\ 5x &= 2(3x - 1) \\ 5x &= 3(3x - 1) \\ 5x &= 4(3x - 1) \\ 2x &= 3x - 1 \end{aligned}$$

de las cuales solamente la segunda y la última tiene solución en dígitos, para la segunda $x = 2$ y para la última $x = 1$. Entonces los posibles números son 24 y 15.

Solución 52

Por la simetría la recta que pasa por los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ pasa por los puntos X y Z

De la misma, la recta que une los puntos L y M pasa por Z. Además, al ser $\overline{AM}$ y $\overline{BL}$ diagonales del cuadrado $ABML$, el segmento $\overline{XZ}$ mide 1 . Es fácil ver que los triángulos XYZ y LYA son semejantes en ese orden, ver la figura

Entonces tenemos las relaciones de proporcionalidad, que también afecta a las alturas h y H, respectivamente para $\triangle XYZ$ y $\triangle LYA$

$$\frac{\overline{XZ}}{\overline{AL}} = \frac{1/2}{1} = \frac{h}{H}$$

Y también se cumple que $h + H = 1/2$. De donde, $h = 1/6$, y de esta forma

$$\text{Area} = 2 \cdot \text{area } \triangle XYZ = \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Solución 53

Al descomponer 1980 se tiene $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Simplificando el factor 10 es fácil ver que el número restante es par. Entonces nos queda por ver la divisibilidad entre 3^2 y 11.
Para que un número sea divisible entre 3^2 es necesario que la suma de los dígitos sea divisible entre 3^2. Veamos que es así

$$\begin{aligned} &\underbrace{1 + (2 + \cdots + 7) \cdot 10 + 8}_{\text{dígitos decenas}} + \underbrace{9 + (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 6}_{\text{dígitos unidades}} \\ = \quad & 9 + \frac{2 + 7}{2} \cdot 6 \cdot 10 + 9 + \frac{1 + 9}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 9 \cdot 62 \end{aligned}$$

El criterio de divisibilidad entre once establece que la suma de las cifras de las posiciones pares menos la suma de las cifras de las posiciones impares tiene que ser divisible entre once.
La suma de las cifras impares da

$$0 + (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) \cdot 6 + 9 = 9 \cdot 31$$

La suma de las cifras pares es

$$9 \cdot 62 - 9 \cdot 31 = 9 \cdot 31$$

Entonces la diferencia entre las cifras pares e impares es nula, es decir, es divisible entre 11.

Solución 54

Observemos que la figura rayada es un cuadrado, en efecto de la figura se sigue:

que los triángulos ABC y AED son iguales luego ángulos son como los del gráfico, por otro lado es claro que $\alpha + \beta = 90^0$
Es área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{1}{2} \frac{2\ell}{3} \ell = \frac{1}{3} \ell^2$$

donde ℓ es el lado del cuadrado. Por la simetría de la figura se sigue el cuadrilatero $BCDF$ tiene área $\frac{1}{3}\ell^2$

notemos que desplazando el trapecio superior tenemos

la figura resultante es una rectangulo cuyo ancho es x (el lado del cuadrado) y largo igual a el segmento

$$BC = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{2}{3}\ell\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}\ell$$

como esta figura tiene área $\frac{1}{3}\ell^2$ se tiene

$$\frac{1}{3}\ell^2 = x\frac{\sqrt{13}}{3}\ell$$

de donde se tiene

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{13}}$$

y

$$x^2 = \frac{\ell^2}{13}$$

Luego la fracción del total que representa la zona rayada es $\frac{1}{13}$.

Solución 55

Observemos que:
Un piso tiene 4 palitos
Dos pisos tienen 13 palitos.
Tres pisos tienen 26 palitos.
Cuatro pisos tienen 43 palitos.
Cinco pisos tienen 64 palitos
Contemos los palitos para una torre de 4 pisos como la del gráfico:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{piso } 1 & \to & 4 \\
\text{piso } 2 & \to & 4 + 2 \cdot 1 + 3 \\
\text{piso } 3 & \to & 4 + 2 \cdot 3 + 3 \\
\text{piso } 4 & \to & 4 + 2 \cdot 5 + 3 \\
 & \vdots & \\
\text{piso } n & & 4 + 2 \cdot (2n - 3) + 3
\end{array}
$$

sumando tenemos:

$$
\begin{aligned}
& 4n + 2(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)) + 3(n - 1) \\
= \; & 7n - 3 + 2(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)) + 3(n - 1) \\
= \; & 2n^2 + 3n - 1
\end{aligned}
$$

donde se debe observar que en la suma se tienen $n - 1$ términos de una progresión aritmética con diferencia común igual a 2.
Como tenemos 701 palitos, calcular el número de pisos equivale a resolver n en la siguiente ecuación

$$
\begin{aligned}
2n^2 + 3n - 1 &= 701 \\
(2n + 39)(n - 18) &= 0
\end{aligned}
$$

tomando la solución positiva tenemos que $n = 18$.

Solución 56

Un número menor a 10000 debe tener cuatro dígitos o menos. Se debe usar solamente los dígitos 2 y 3. Si tuviera cuatro dígitos,

2	2	3	2

el menor número posible tiene como suma de dígitos 8 y el mayor número posible tiene la suma 12. Por el criterio de divisibilidad entre 9, la suma de los dígitos del número pedido debe ser 9. Esta opción sólo se da cuando se usa un dígito 3 y el resto de dígitos son 2, y existen 4 de estos números de cuatro cifras.
Consideremos ahora números de tres cifras,

2 3 2

El menor número que se puede formar tiene como suma de sus dígitos 6, y el mayor número posible tiene como suma de sus dígitos 9. Entonces el único número de este caso divisible entre 9 es el mayor posible 333.
Pasando a números con dos cifras y con una cifra que utilicen exclusivamente cifras 2 y 3, ninguno de ellos es divisible entre 9.
Por lo tanto, hay solamente cinco números divisibles entre 9, menores a 10000, y que contengan únicamente cifras 2 y 3.

Solución 57
Vamos a contar los dígitos:

$$1223334444\ldots\underbrace{8888\ldots8}_{8}\underbrace{99999\ldots9}_{9}$$

en este caso hay

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$$

$$\underbrace{101010\ldots10}_{10}\underbrace{1111111\ldots11}_{11}\ldots\underbrace{999999\ldots99}_{99}$$

en este caso hay

$$\begin{aligned}
& 10\cdot 2 + 11\cdot 2 + 12\cdot 2 + \cdots + 99\cdot 2 \\
= {} & 2(10 + 11 + 12 + \cdots + 99)(10 + 99)90 \\
= {} & 2\frac{(10 + 99)\,90}{2} = 9810
\end{aligned}$$

luego no calculamos más ya que $1935 < 9810$, es claro que 1935 esta en este segundo grupo es decir en

$$101010\ldots1011111\ldots11\ldots999999\ldots99$$

quitando 45 veamos cuanto nos falta para llegar a 1935

$$\begin{aligned}
1935 - 45 &= 1890 \\
1890 \div 2 &= 945
\end{aligned}$$

lo cual dice que 945 es la cantidad de números de dos cifras que se necesita para llegar a 1935 como la cifra en las unidades, entonces

$$\begin{aligned}
10 + 11 + 12 + \cdots + n &= 945 \\
\frac{10 + n}{2}(n - 10 + 1) &= 945 \\
\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 45 &= 945 \\
n^2 + n - 1980 &= 0 \\
(n + 45)(n - 44) &= 0
\end{aligned}$$

luego $n = 44$ de manera que

$$\underbrace{10\ldots10}_{10}\underbrace{11\ldots11}_{11}\underbrace{12\ldots12}_{12}\ldots\underbrace{44\ldots44}_{44}\ldots$$

luego el dígito de posición 1935 es 4.

Solución 58

Sea h la altura del triángulo ABC

entonces es clara la siguiente proporción

$$\frac{h}{4-h} = \frac{2}{4}$$

de donde se tiene $h = \frac{4}{3}$ y el área buscada es

$$A = \frac{1}{4}\pi 4^2 - 2\frac{1}{2}(4)\frac{4}{3} = 4\pi - \frac{40}{3}$$

Solución 59

Analizando el numerador, y agrupando de dos en dos teniendo en cuenta las diferencias de cuadrados tenemos

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ya que las bases son consecutivas, de modo que en cada grupo queda la suma $a + b$, y el numerador se convierte en la suma

$$\begin{aligned} & 2007 + 2006 + 2005 + 2004 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ = \ & \frac{2007+1}{2} 2007 \end{aligned}$$

Por otro lado, al estudiar el denominador, agrupando por parejas cada diferencia da la unidad

$$\underbrace{2007 - 2006}_{1} + \cdots + \underbrace{3 - 2}_{1} + 1 = \frac{2006}{2} + 1$$

De esta forma, la fracción resulta

$$\frac{\frac{2007+1}{2}2007}{\frac{2006}{2}+1} = 2007$$

Solución 60

En el sistema
$$\left\{\begin{array}{r} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ x^3 - xy^2 - x^2y + x - y + 2 = 0 \end{array}\right.$$
podemos factorizar en la segunda ecuación x
$$x\underbrace{\left(x^2 - y^2 - xy\right)}_{-1} + x - y + 2 = -y + 2 = 0$$
donde se uso la primera ecuación con $x^2 - y^2 - xy = -1$, de donde $y = 2$. Trabajando la primera ecuación con este valor tenemos
$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$
Hay entonces dos soluciones $(x; y) = (3; 2)$ y $(x; y) = (-1; 2)$.

Solución 61

Las canicas se disponen como sigue

dada la simetría de la configuración tenemos

a partir de los cual es fácil observar que el radio buscado es $1 + \sqrt{x^2 + 1}$, por otro lado de la figura se sigue
$$\tan 30^0 = x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

de donde $\sqrt{x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y así el radio es $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Solución 62

Observemos que los múltiplos de 3 son:

$$3; 6; 9; \ldots; 99$$

de donde

$$3\cdot 1; 3\cdot 2; 3\cdot 3; \ldots; 3\cdot 33$$

habiendo hasta acá 33 tres, queda por estudiar el número de tres en la sucesión

$$1; 2; 3; \ldots; 33$$

y tenemos

$$3; 6; 9; \ldots; 33$$

osea

$$3\cdot 1; 3\cdot 2; 3\cdot 3; \ldots; 3\cdot 11$$

y tenemos 11 nuevos tres, finalmente estudiamos la sucesión

$$1; 2; 3; \ldots; 11$$

y tenemos los siguientes multiplos de tres

$$3; 3\cdot 6; 3^2$$

y hay 4, en total existen 33 + 11 + 4 = 48 tres, contenidos en 100!

Solución 63

Sea n la cantidad de cifras a que tiene el número de noventa cifras

$$\underbrace{2}_{1}a\underbrace{22}_{2}a\underbrace{222}_{3}a\ldots\underbrace{2\cdots2}_{n}a\ldots$$

Es posible que la última cifra no sea a sino un 2. Calculemos la cantidad de cifras 2 que hay hasta antes del último dígito a

$$1+2+3\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Añadiendo las cifras a se tiene $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{1}{2}n(n+3)$. Hallemos la cantidad n tal que esta suma sea más aproxima las noventa cifras

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n(n+3) &= 90 \\ n(n+3) &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5 \end{aligned}$$

Pero hay una manera de separar la factorización de la derecha como producto de enteros los cuales disten 3, viendo que ambos no pueden tener la misma paridad,

$$\left(2^2\cdot 3\right)\cdot(3\cdot 5)$$

De donde $n = 12$ y esto demuestra que el número justo acaba en un dígito a.
Ahora, la suma de todos los dígitos es

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \cdots + 12) + 12a &= 2\frac{13 \cdot 12}{2} + 12a \\ &= 12(13 + a) \end{aligned}$$

Entonces basta que el segundo factor sea divisible por 3 para que el número de noventa cifras sea divisible entre 9. Esto da las opciones $a = 2; 5; 8$.

Solución 64

Consideremos los números dados en la tabla:

		31	32	33	34	35	36	37	
		30	13	14	15	16	17	38	
		29	12	3	4	5	18	39	
		28	11	2	$\underline{1}$	6	19	40	
	$\vdots$	27	10	$\underline{9}$	8	7	20	41	
	51	26	$\underline{25}$	24	23	22	21	42	
	50	$\underline{49}$	48	47	46	45	44	43	

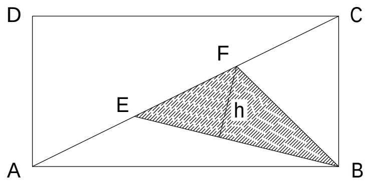
Observemos que los números 1,9,25,49,... que figuran en la diagonal corresponden a cuadrados impares, luego busquemos un cuadrado impar cerca de 2007, como $45^2 = 2025$ se tiene

$$\begin{array}{cccccccccl} & & & & \cdots & 11 & 2 & 1 & \Big\} & 9 \\ & & & & \cdots & 10 & 9 & 8 & & \\ & & & & & & & & & 23 \text{ filas} \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 2025 & 2024 & \cdots & 2007 & 2006 & 2005 & 2004 & 2003 & & \end{array}$$

Observemos tambien que dado un cuadrado impar a^2 este define un cuadrado centrado en 1 y de lado a, entonces para 45^2 se tiene un cuadrado de lado 45 siendo el punto medio del lado del mismo 2003, de donde se sigue que 2007 esta en la 4ta. columna de la izquierda de 1 y 22 filas por debajo.

Solución 65

Vamos a calcular el área del triángulo EFB, del gráfico se sigue



Como los puntos E y F son de trisección, el área del triángulo EFB es:

$$A = \frac{1}{2}(8)(3) - \frac{1}{2}(8)(1) - \frac{1}{2}(3)\left(\frac{8}{3}\right) = 4$$

del teorema de Pitagoras

$$\overline{EF} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}(8)\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{265}$$

$$4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{265}\right)h$$

$$h = \frac{24}{265}\sqrt{265}$$

Solución 66

Al considerar una cuadrícula 3×2 se ve que la diagonal pasa por cuatro cuadrados. Entonces en el caso 300×200 es claro que pasará por 4×100 cuadrados.

Solución 67

El número dado se puede escribir como

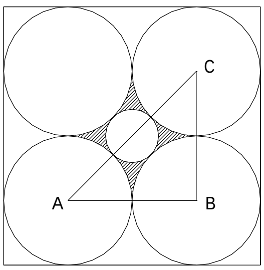
$$\left(\underbrace{9\cdots9}_{2007}\right)^2 - 1 = (9\cdots9 - 1)(9\cdots9 + 1)$$

$$= \left(\underbrace{9\cdots8}_{2007}\right)\left(\underbrace{10\cdots0}_{2007}\right)$$

Contando las cifras tenemos $2007\cdot 2 = 4014$.

Solución 68

Primero debemos hallar el radio de la circunferencia pequeña, sea r su radio entonces del gráfico se tiene:



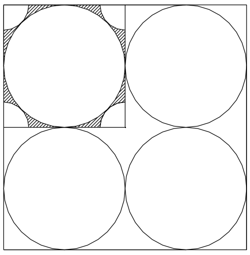
$$4(R + r + r + R)^2 = (R + R)^2 + (R + R)^2$$

donde $R = \frac{a}{4}$ es el radio de las circunferencias grandes, entonces

$$4(R + r)^2 = 8R^2$$

de donde
$$r = \left(\sqrt{2}-1\right) R = \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

finalmente el área buscada se puede calcular de acuerdo a la simetría y a partir del gráfico



$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{8}\left(2 - 2\pi + \sqrt{2}\pi\right) \end{aligned}$$

Solución 69

Sea x el número de ladrillos de Matias ,observemos que este número no es cuadrado ni cubo, pero el doble si es cuadrado y el triple cubo, entonces tenemos
$$\begin{cases} 2x = a^2 \\ 3x = b^3 \end{cases}$$

donde a y b son enteros positivos. De la primera ecuación se sigue que
$$x = 2k^2$$

y de la segunda tenemos
$$x = 3^2h^3$$

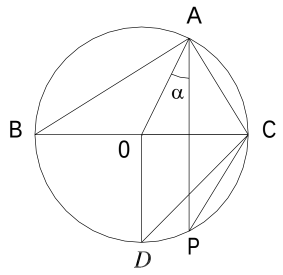
igualando tenemos
$$2k^2 = 3^2h^3$$

de donde se tiene que h es par y el menor valor que puede tomar será 2, de donde
$$2k^2 = 3^2 2^3$$

de donde
$$k = 6$$

así
$$x = 2 \times 6^2 = 72$$

Solución 70
Del gráfico se sigue



$$
\begin{aligned}
\widehat{OCD} &= 45^0 \\
\widehat{OCP} &= \widehat{PCD} + \widehat{OCD} = 60^0 \\
\widehat{OCA} &= \widehat{OCP} = 60^0 \\
\widehat{CAP} &= 90^0 - 60^0 = 30^0 \\
\widehat{CBA} &= 90^0 - 60^0 = 30^0 \qquad (4.5) \\
\widehat{OAB} &= \widehat{CBA} = 30^0 \qquad (4.6) \\
\alpha &= 90^0 - \widehat{OAB} - \widehat{CAP} = 30^0 \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Solución 71
Al racionalizar cada sumando obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}}\cdot\frac{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}}{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}} = \frac{\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}}{\underbrace{a_{i+1}-a_i}_{3}}$$

entonces la suma da

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{2006}}+\sqrt{a_{2007}}} \\
&= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{3} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{3} + \frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{3} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_{2006}}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_1}}{3}
\end{aligned}
$$

Racionalizando el término de la derecha obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{2006}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{2007}}}\cdot\frac{\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_1}} \\
&= \frac{2006\left(\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_1}\right)}{\underbrace{a_{2007}-a_1}_{3\cdot 2006}} = \frac{\sqrt{a_{2007}}-\sqrt{a_1}}{3}
\end{aligned}
$$

Como se puede ver ambas expresiones son iguales.

Solución 72

Como los números dados están en progresión aritmética podemos escribir

$$\underbrace{\log_a(x)}_{Z-D};\ \underbrace{\log_b(x)}_{Z};\ \underbrace{\log_c(x)}_{Z+D}$$

Entonces tenemos que

$$x = a^{Z-D} = b^{Z} = c^{Z+D}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} b &= c^{(Z+D)/D} \\ b &= a^{(Z-D)/D} \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} (ac)^{\log_a b} &= \underbrace{a^{\log_a b}}_{b} c^{\log_a b} = bc^{\log_a b} \\ &= c^{(Z+D)/Z} c^{(Z-D)/Z} = c^2 \end{aligned}$$

como se quería mostrar.

Solución 73

El primer factorial en el que aparece el factor 100 es 10!, ya que tiene los factores $2 \cdot 5 \cdot 10$ que no aparecían en los primeros enteros. Los primeros cuatro enteros dan

$$1! + \blacksquare 2! + \blacksquare 3! + \blacksquare 4! = 1 + \blacksquare 2 + \blacksquare 6 + \blacksquare 24 = \underline{3}3$$

Es decir, se aporta con 3 a la cifra de las decenas. En los demás enteros ya no aparecen unidades, veamos qué cifra de decenas tienen

$$\begin{aligned} 5! &= 120 \to 2 \\ 6! &= 720 \to 2 \\ 7! &= 5040 \to 4 \\ 8! &= 40320 \to 2 \\ 9! &= 362880 \to 8 \end{aligned}$$

Entonces estos enteros aportan $3 + 2 + 2 + 4 + 2 + 8 = 21$, es decir la cifra de las decenas vale 1.

Solución 74

La ecuación se la puede escribir como

$$\begin{aligned} x^2 - \left(b^2+1\right)^2 - \left(a^2 - a + 1\right)\left(x - b^2 - 1\right) &= 0 \\ \left[x - \left(b^2+1\right)\right]\left[x + \left(b^2+1\right)\right] - \left(a^2 - a + 1\right)\left(x - b^2 - 1\right) &= 0 \\ \left[x - \left(b^2+1\right)\right]\left\{x + \left(b^2+1\right) - \left(a^2 - a + 1\right)\right\} &= 0 \end{aligned}$$

de donde las raíces son

$$\begin{aligned} x_1 &= b^2 + 1 \\ x_2 &= a^2 - a - b^2 \end{aligned}$$

Es claro que la primera es positiva. Para ver la positividad de la segunda, recordemos que a es un entero mayor que el entero positivo b, escribamos

$$a^2 - b^2 - a = \underbrace{(a+b)}_{\geq a}\underbrace{(a-b)}_{\geq 1} - a \geq 0$$

Solución 75

Como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ entonces $\alpha = \pi - \beta - \gamma$

$$\begin{aligned} & \sin^2(\pi - \beta - \gamma) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \\ = {} & \sin^2\beta\cos^2\gamma + 2\sin\beta\cos\gamma\cos\beta\sin\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \\ = {} & -2\cos^2\gamma\cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\gamma\cos\beta\sin\gamma + 2 = 2 \end{aligned}$$

De donde se sigue:

$$2\sin\beta\cos\gamma\cos\beta\sin\gamma - 2\cos^2\gamma\cos^2\beta = 0$$

Factorizando

$$2(\cos\gamma\cos\beta)(-\cos\gamma\cos\beta + \sin\beta\sin\gamma) = 0$$

de donde se tiene:

$$\begin{aligned} \cos\gamma\cos\beta &= 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \vee \gamma = \frac{\pi}{2} \\ \sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\cos\beta &= 0 \Rightarrow \cos(\beta+\gamma) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \text{ y } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

y en cualquier caso el triángulo es rectángulo

Solución 76

El área del triángulo AMN es la cuarta parte del área del triángulo YNB pues A y M son puntos medios de $\overline{NY}$ y $\overline{NB}$, por la misma razon el área del triángulo AMN es la cuarta parte del área del triángulo XMC. Además, dado que $\overline{MN}$ es una tercera parte de $\overline{BC}$ y la altura desde A a $\overline{BC}$ es la misma que hasta $\overline{MN}$ se tiene el área del triángulo AMN es igual a $\frac{1}{3}(270) = 90$ luego el área del triángulo YNB es igual al área del triángulo $XMC = 4 \times 90 = 360$. Observe que

$$\text{Área}XYBC = \text{Área}YNB + \text{Área}XMC - \text{Área}AMN + \text{Área}AXY$$

Observe que los triángulos AXY y AMN son congruentes por lado, angulo, lado, entonces

$$\text{Área}XYBC = \text{Área}YNB + \text{Área}XMC = 360 + 360 = 720$$

Solución 77

Sean los números buscados a y b; entonces

$$a - b = 7 \tag{1}$$

$$ab = 5k; \qquad k \text{ entero} \tag{2}$$

de (1) despejamos a y reemplazando en (2) tenemos:

$$(7 + b)\, b = 5k; \qquad k \text{ entero}$$

de esta última relación tenemos que 5 divide a $(7 + b)\, b$; entonces hay dos posibilidades:

$$5 \text{ divide a } b \tag{3}$$

$$5 \text{ divide a } b + 7 \tag{4}$$

de (3) tenemos $b = 5h$; con h entero, como b esta entre 1 y 100 entonces el mayor valor para $h = 20$; luego hay 20 posible valores para b y en consecuencia para a:
Por otro lado de (4) tenemos $b + 7 = 5n$; con n entero, como b esta entre 1 y 100 entonces el mayor valor para $n = 18$; luego hay 18 posible valores para b y en consecuencia para a: En total hay entonces $20 + 18 = 38$:

Solución 77
Hay en total $5! = 120$ sumandos. Al sumar los dígitos de las unidades, hay que contar 4! veces 1, y lo mismo para 2; 3; 4; 5, es decir, el aporte de las unidades viene a ser

$$a = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 4! = 15 \cdot 4!$$

Y, notemos que ocurre lo mismo para las decenas, centenas, unidades de mil, unidades de diez mil. Es decir la suma total vale

$$\begin{aligned} a + 10a + 10^2 a + 10^3 a + 10^4 a &= 11111 \cdot a \\ &= 11111 \cdot 15 \cdot 4! = 3999\,960 \end{aligned}$$

Solución 78
Al factorizar la expresión $x^3 + y^3$ se tiene

$$\left(x^2 - xy + y^2\right)(x + y)$$

de donde la suma pedida $x^2 + y^2 = \frac{5408}{26} + xy$. Si averiguamos cuánto vale el producto xy, tendremos el resultado. Podemos además usar el desarrollo del binomio al cubo

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) \\ 26^3 &= 5408 + 3xy \cdot 26 \end{aligned}$$

De donde xy vale 156, y $x^2 + y^2 = 364$.

Solución 79
Al factorizar la expresión $x^3 + y^3$ se tiene

$$\left(x^2 - xy + y^2\right)(x + y)$$

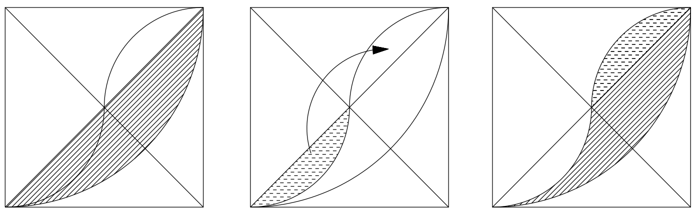
de donde la suma pedida $x^2 + y^2 = \frac{5408}{26} + xy$. Si averiguamos cuánto vale el producto xy, tendremos el resultado. Podemos además usar el desarrollo del binomio al cubo

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) \\ 26^3 &= 5408 + 3xy \cdot 26 \end{aligned}$$

De donde xy vale 156, y $x^2 + y^2 = 364$.

Solución 80

Observe la figura



entonces el área buscada será:

$$A = \frac{1}{4}\pi 10^2 - \frac{1}{2}10^2 = 25\pi - 50$$

Solución 81

La suma de la fila n (comenzando desde arriba) es

$$F_n = n \cdot 2^{n-1}$$

Nos piden

$$F_1 + \cdots + F_{21} = 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + 21\cdot 2^{20}$$

que se puede escribir como las sumas de las progresiones geométricas que siguen

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{20} &= 2^{21} - 1 \\
2 + 2^2 + \cdots + 2^{20} &= 2\cdot\left(2^{20} - 1\right) = 2^{21} - 2 \\
2^2 + \cdots + 2^{20} &= 2^2\cdot\left(2^{19} - 1\right) = 2^{21} - 2^2 \\
&\vdots \\
2^{19} + 2^{20} &= 2^{19}\cdot\left(2^2 - 1\right) = 2^{21} - 2^{19} \\
2^{20} &= 2^{20}\cdot(2 - 1) = 2^{21} - 2^{20}
\end{aligned}$$

O sea, tenemos

$$\begin{aligned}
21\cdot 2^{21} - \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{20}\right) &= 21\cdot 2^{21} - \left(2^{21} - 1\right) \\
&= 20\cdot 2^{21} + 1
\end{aligned}$$

Solución 82

Para el caso $m = 3$, $n = 5$, se obtiene 7. Para el caso $m = 7$; $n = 4$, se obtiene 10. Hay que notar que si m y n son coprimos, siempre se va a tocar un cuadrado nuevo cada vez que se avance en la diagonal, y se tendrá en total $m + n - 1$. Si no son primos relativos, la diagonal toca algunos vértices, el problema hay que estudiarlo por cuadrados desde que se parte de un vértice hasta que se llega a otro. La cantidad de cuadrados será igual a

$$m + n - \operatorname{mcd}(m; n)$$

ya que el máximo común divisor de m y n es la cantidad de vértices que se va a atravesar.

Solución 83

Factorizando tenemos

$$ab\,(a - b)\,(a + b)$$

Si uno de los números, a ó b, fuese par, también los sería c. Si ambos fuesen impares, su suma sería par, y c también sería par.
Nos falta ver que es divisible por 3. Si alguno de los números ya es divisible por 3, no hay ningún problema. Sino escribamos

$$\begin{aligned} a &= 3q_1 + r_1 \\ b &= 3q_2 + r_2 \end{aligned}$$

con r_1 y r_2 tomando valores en $\{1; 2\}$. Si r_1 y r_2 toman valores distintos, la suma de a y b da

$$3\,(q_1 + q_2) + \underbrace{(r_1 + r_2)}_{3}$$

que es un múltiplo de 3. Si toman valores iguales, la resta de a y b

$$3\,(q_1 - q_2) + \underbrace{(r_1 - r_2)}_{0}$$

también da un múltiplo de 3. En todos estos casos, el número c es divisible por 3.

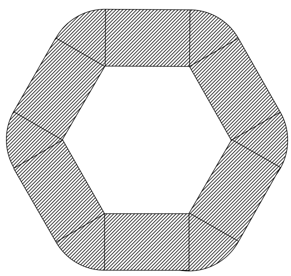
Capítulo 5

Miscelanea de problemas de Olimpiadas Matemáticas

Ejercicio 1 Sobre una mesa hay una semiesfera de radio 1 apoyada sobre su base, y 6 esferas iguales de radio R, cada una tangente a la semiesfera, a la mesa, y a otras dos esferas. Encuentra el valor de R.

Ejercicio 2 En cada casilla de un tablero gigante hay escrito un número natural, de acuerdo a las siguiente regla:
Los números de la primera columna forman una progresión aritmética de primer término 6 y diferencia común 3, es decir 6,9,12,15,... Los números de la primera …la forman una progresión aritmética de diferencia 3, y primer término 6, los de la segunda …la forman una progresión aritmética de diferencia 5 y primer término 9, y asi los de la …la k forman una progresión aritmética de diferencia $2k + 1$ y primer término el termino de lugar k en la progresión dada al principio. Determinar todas las casillas que contienen el número 2000 (para indicar la casilla indicar la progresión a la cuál pertenece el número 2000 y el término que ocupa).

Ejercicio 3 Sobre los lados de un hexágono regular de a metros de lado, se construyen rectángulos de b metros de altura. Luego se unen los vértices próximos de los rectángulos con arcos trazados desde los vértices del hexágono como centros, vea la …gura, determinar el área total de la …gura sombreada.



Ejercicio 4 ¿Cual es el mayor entero positivo n tal que el resto de las divisiones de 154; 238 y 334 entre n son iguales?

Ejercicio 5 Se pinta de negro las caras de un cubo de madera cuyas aristas miden n centímetros, donde n es mayor a 3. Por cortes paralelos a las caras, el cubo es dividido en n^3 cubos pequeños, cada uno con aristas iguales a 1 centímetro. Sabiendo que el numero total de cubos pequeños con exactamente una cara pintada de negro es igual al numero de cubos pequeños con todas la caras sin pintar, determine el valor de n

Ejercicio 6 Hallar las soluciones positivas del sistema:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^4 \end{cases}$$

Ejercicio 7 Encuentre todos los números de cuatro cifras con la siguiente propiedad: Si pasamos la primera cifra al último lugar y restamos el número original obtenemos 7893

Ejercicio 8 Pruebe que el número $\underbrace{11\ldots1}_{2r\text{ cifras}} - \underbrace{22\ldots2}_{r\text{ cifras}}$ es un cuadrado perfecto para todo r:

Ejercicio 9 Determine el número más grande que es producto de enteros positivos cuya suma es igual a 1976.

Ejercicio 10 Demostrar que en un triángulo rectángulo de catetos a , b e hipotenusa c , se cumple

$$c^3 > a^3 + b^3$$

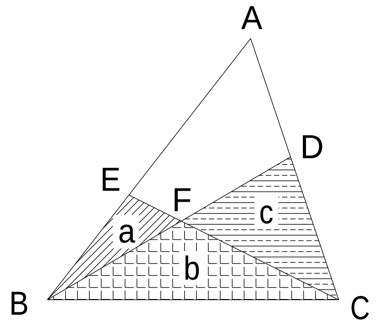
Ejercicio 11 Probar que algún número múltiplo positivo de 21 tiene a 241 como sus últimos tres dígitos.

Ejercicio 12 Calcule la suma de los dígitos del número $10^{97} - 97$

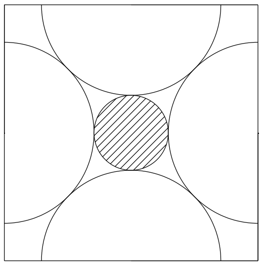
Ejercicio 13 Dos hermanos cuentan de 1 en 1 empezando juntos en 1, pero la velocidad del hermano mayor es el triple que del hermano menor, (cuando el menor dice 2, el mayor dice 6). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es algún múltiplo de 29, entre 500 y 600, el hermano menor sigue contando normalmente y el mayor empieza a contar en forma descendente y en cierto momento, los dos dicen el mismo número. ¿Cual es dicho número?

Ejercicio 14 Se disponen de 10000 …chas iguales con forma de triángulo equilátero . Con estos "triangulitos"se forman hexágonos regulares, sin superposiciones ni huecos . Si se forma el exágono regular que desperdicia la menor cantidad posible de "triangulitos" , cuántos "triangulitos" sobran ?

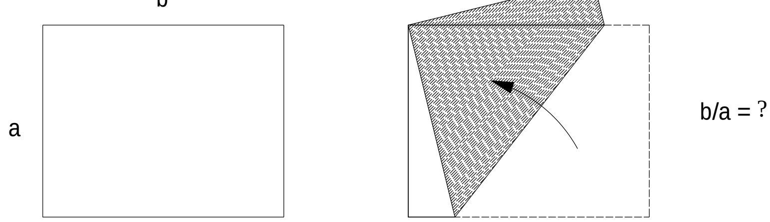
Ejercicio 15 En el triángulo ABC, desde B se traza una recta que corta en D a $\overline{AC}$; tambien desde C se traza una recta que corta en E a $\overline{AB}$; sea F el punto de intersección de estas rectas. Supongamos que los triángulos BFE; BFC; CFD tienen areás a; b; c respectivamente. Halle el área del cuadrilátero $EFDA$ en términos de a; b; c.



Ejercicio 16 La …gura muestra cuatro semicírculos de radio de 9 cm. El centro de los semicírculos son los puntos medios de los lados del cuadrado. ¿Cuál es el área, del círculo interior que es tangente los cuatro semicírculos?

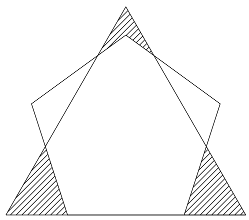


Ejercicio 17 Una hoja rectangular se doble uniendo dos vértices opuestos, si el pliegue formado tiene la misma longitud de el lado mayor del rectángulo original, halle la proporsición de los lados del mismo.



Ejercicio 18 En la siguiente …gura se tiene un pentágono de lado 5 y una triángulo equilátero de

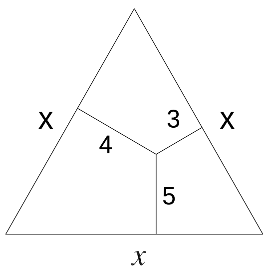
lado x; ¿existe un triángulo tal que las áreas sobreadas tengan áres $\frac{25\sqrt{3}}{32}$?



Ejercicio 19 Pedro escribe todos los números de cinco cifras cuyos producto de estas cifras es 6, halle la suma de todos estos números.

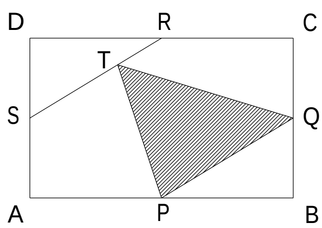
Ejercicio 20 Se tiene un tablero de 24 x 15. Calcular la cantidad de subtableros cuadrados y calcular la cantidad de subtableros rectangulares con proporción 2:1 (por ejemplo, de 1x2, de 2x4, de 6x3, de 4x2...)

Ejercicio 21 En el siguiente triángulo equilátero, se tiene un punto interior tal que dista de los lados 3,4 y 5 respectivamente, hallar el lado x de tal triángulo.



Ejercicio 22 De un cuadrado de lado 16 se deben recortar dos triángulo equiláteros iguales, hallar la longitud de los lados de estos si se quiere que la suma de las áreas de estos sea la máxima posible.

Ejercicio 23 En el rectángulo $ABCD$, los puntos $P; Q; R$ y S son puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, y T el punto de trisección de $\overline{RS}$. ¿Qué fracción del área $ABCD$ cubre el triángulo PQT?



Bibliografía

[1] Patricia Fauring y Flora Gutierez (1994), *Problemas 4*, Red Olimpica.

[2] E. Hinrichsen, N. Buschiazzo, S. Filipputti, S. S. de Hinrichsen (1994), *Problemas 2*, Red Olimpica

[3] Pedro Sanchez (2001), *Notas de Aritmética para la Olimpiada de Matemáticas*.

[4] A. Semerena, R. B. Manfrino, J. A. G. Ortega (2004), *Problemas para la 18º Olimpiada Mexicana de Matemáticas*

[5] Patricia Fauring y Flora Gutierez (1999), *Problemas 9*, Red Olimpica.

[6] 47º International Mathematical Olympiad Slovenia 2006, *Problems with Solutions,* 47º IMO

[7] Olimpiada Brasileira de Matemática (2003), *Eureka!*, IMPA - Sociedade Brasileira de Matemática

[8] Patricia Fauring, Maria Gaspar, Flora Gutierrez (1996), *Olimpiada Matemática Rioplatene (1º a 4º)*, Red Olimpica.

[9] Fauring, Wagner, Wykowski, Gutierez, Pedraza, Moreira (1994), *Problemas de Olimpiadas Matemáticas del Cono Sur (1º a 4º)*, Red Olimpica.

[10] Academia Mexicana de Ciencias (1998), *IV Olimpiada de Mayo*.

[11] Patricia Fauring, Flora Gutierrez, Ana Wykowski, Eduardo Wagner, Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira (1996), *10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas*, Organización de Estados Iberoamericanos para la Eduación, la ciencia y la Cultura (OEI)

[12] Maria Luisa Pérez Segui (2004), *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas.

[13] http://www.oma.org.ar/

[14] http://erdos.fciencias.unam.mx/

[15] http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm

[16] http://www.obm.org.br/opencms/

"Las olimpiadas matemáticas han constituido un espacio donde aparece el reto no solo de conocer más sino de resolver problemas. Resolver problemas tiene que ver con enfrentarse a una situación desconocida, aunque se conozcan los elementos involucrados, una situación donde las técnicas parecen no conducir a nada, donde el trabajo a realizar parece inalcanzable. Y, es, más bien, en este punto en el que surge la necesidad de dar solución. Surge la desesperación de intentar caminos irrisorios, opciones inicialmente inaceptales, como si la mente pudiese forzar las bases propuestas, cambiar los rigores de la realidad. Luego, tiempo y tiempo... y de repente el descubrimiento, haber encontrado, no se sabe de dónde, una manera. Después se atesora la idea encontrada, se la repiensa, se la saborea. Queda todavía el requerimiento de comunicarla, de ponerla sobre papel, queda la cuestión estética de escribirla sin ningún exceso ni ninguna falta."

Car-
los E. Gonzales C.